المحاضرة ٢٣ :-

التوزيع الاحتمالي المشترك
(Joint Probability Distribution)

يعرف التوزيع الاحتمالي المشترك بانه دالة احتمالية تجمع بين متغيرين او اكثر من المتغيرات العشوائية في آن واحد مثلاً اذا كان لدينا X , Y متغيران عشوائيان فإن الدالة الاحتمالية التي تعبر عن سلوك هذين المتغيرين معاً تسمى بدالة التوزيع الاحتمالي المشترك. ويمكن تحديد نوعين رئيسيين من التوزيعات الاحتمالية المشتركة استناداً الى نوع المتغيرات سواء كانت متغيرات متقطعة او مستمرة.

امثلة متنوعة عن المتغيرات العشوائية المشتركة.

١- عند اختيار طالب من احد الصفوف وافترضنا ان (X) يمثل طول الطالب و (Y) يمثل وزنه فإن الزوج المرتب (X,Y) يمثل متغير عشوائي ذو بعدين

٢- عند رمي قطعتي نقود مره واحده وبافتراض ان (X) تمثل النتائج التي تظهر على قطعة النقود الاولى و (Y) يمثل النتيجة التي تظهر على القطعة الثانية فإن الزوج المرتب (X,Y) يمثل متغير عشوائي ذو بعدين

* دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة
Joint Probability Mass function

افرض ان X, Y متغيران عشوائيان من النوع المتقطع بحيث ان

$R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ⟸ فترة المتغير X (فضاء X)

$R_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ ⟸ فترة المتغير Y (فضاء Y)

عندئذٍ فإن دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة التي تعبر عن سلوك هذين المتغيرين هي :-

$$f(x_i, y_j) = P_r(X = x_i, Y = y_j)$$

ان دالة الكتلة الاحتمالية $f(x_i, y_j)$ تحقق الشرطين الآتيين :-

① $f(x_i, y_j) \geq 0$

② $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) = 1$

* دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة
Joint Probability density function

افرض ان X, Y متغيران عشوائيان من النوع المستمر وفضاء X هو R_X و Y هو R_Y فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تحقق الشرطين الآتيين :-

① $f(x_i, y_j) \geq 0$

② $\iint_{R_X R_Y} f(x_i, y_j)\, dx\, dy = 1$

تعريف ١ :- دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة ذات البعد k .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)$$

الشروط

① $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$

② $\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 1$

تعريف ٢ :- دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة ذات البعد k .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = Pr(X = x_1, \dots, X_k = x_k)$$

الشروط

① $f(x_1, \dots, x_k) \geq 0$

② $\int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\, dx_k \dots dx_1 = 1$

---

* التوزيع الاحتمالي الهامشي (الحدي)

Marginal probability distribution

اذا كانت $f(X, Y)$ دالة احتمالية مشتركة للمتغيرين Y, X فإن الدالة الهامشية (الحدية) لكل من X, Y تعرف كالآتي :-

(1) اذا كان X , Y متغيران عشوائيان من النوع المتقطع فتعرف الدالة الهامشية او التوزيع الهامشي (الحدي) كما يلي :-

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)$$

$$f(y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)$$

(2) اذا كان X , Y متغيران عشوائيان من النوع المستمر فتعرف الدالة الهامشية او التوزيع الهامشي (الحدي)

$$f(x_i) = \int_{R_y} f(x_i, y_j)\, dy$$

$$f(y_j) = \int_{R_x} f(x_i, y_j)\, dx$$

في حالة كون X , Y متغيران من النوع المتقطع تكون $f(x_i, y_j)$ و $f(x_i)$ و $f(y_j)$ بشكل جدول وكالاتي :-

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$---$	y_m	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	$---$	$f(x_1,y_m)$	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	$---$	$f(x_2,y_m)$	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	$--$	$f(x_n,y_m)$	$f(x_n)$
$f(y_j)$	$f(y_1)$	$f(y_2)$	$--$	$f(y_m)$	1

المحاضرة ٢٤ -

* امثلة توضيحية عن التوزيع الاحتمالي المشترك

① القي حجري نرد مرة واحدة وافرض ان X متغير عشوائي يمثل المجموع للرقمين اي انه $X(a,b)=a+b$ وافرض ان Y متغير عشوائي يمثل القيمة العظمى للرقمين اي انه $Y(a,b)=\max(a,b)$ ، حيث ان a,b يمثل الرقمان الظاهرين على الحجر الاول والحجر الثاني على التوالي ، المطلوب ايجاد دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة والدالة الهامشية (الحدية) لكل من المتغيرين العشوائيين X ، Y .

الحل :

$$X(a,b)=a+b \quad , \quad Y(a,b)=\max(a,b)$$

$$X=\{2,3,---,12) \qquad Y=\{1,2,---,6)$$

$$f(2,1)=Pr(X=2,Y=1)=Pr(\{1,1\})=\frac{1}{36}$$

$$f(2,2)=Pr(X=2,Y=2)=Pr(\{\phi\})=0$$

$$f(2,3)=Pr(X=2,Y=3)=Pr(\{\phi\})=0$$

$\vdots$

$$f(3,1)=Pr(X=3,Y=1)=Pr(\{\phi\})=0$$

$$f(3,2)=Pr(X=3,Y=2)=Pr\{(1,2),(2,1)\}=\frac{2}{36}$$

$\vdots$

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	f(y)
1	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/36
2	0	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	3/36
3	0	0	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	5/36
4	0	0	0	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0	7/36
5	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	9/36
6	0	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

٢) اذا كان X , Y متغيران عشوائيان لهما دالة الاحتمال المشتركة التالية

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2x+y) & x=0,1,2 \quad , y=0,1,2,3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

المطلوب:- ١) ايجاد قيمة الثابت c .

٢) ايجاد التوزيع الهامشي لـ X و لـ Y .

٣) $Pr(X \geq 1, Y \leq 2)$

٤) $Pr(X=2, Y=1)$

الحل

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$f(x)$
0	0	C	$2C$	$3C$	$6C$
1	$2C$	$3C$	$4C$	$5C$	$14C$
2	$4C$	$5C$	$6C$	$7C$	$22C$
$f(y)$	$6C$	$9C$	$12C$	$15C$	1

① To find C

$$\sum f(x) = 1 \Rightarrow 6C + 14C + 22C = 1$$

$$\Rightarrow 42C = 1 \Rightarrow C = \boxed{\frac{1}{42}}$$

② التوزيع الحدي لـ X

X	0	1	2
$f(x)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{22}{42}$

التوزيع الحدي لـ Y

Y	0	1	2	3
$f(y)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{9}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{15}{42}$

③ $Pr(\underset{1,2}{X \geq 1}, \underset{0,1,2}{Y \leq 2}) = Pr(X=1, Y=0) + Pr(X=1, Y=1)$

$+ Pr(X=1, Y=2) + Pr(X=2, Y=0)$

$+ Pr(X=2, Y=1) + Pr(X=2, Y=2)$

$$= \frac{2}{42} + \frac{3}{42} + \frac{4}{42} + \frac{4}{42} + \frac{5}{42} + \frac{6}{42} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

(4) $Pr(X=2, Y=1) = \frac{5}{42}$

(2) اذا كان لدينا دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة بالشكل الآتي :-

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 + 2x_2}{45} & x_1 = 0,1,2 \quad x_2 = 1,2,3 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

المطلوب ايجاد (1) $Pr(x_1 \geq 1, x_2 = 3)$

(2) $Pr(x_1 = 1, x_2 \leq 2)$

الحل

(1) $Pr(x_1 \geq 1, x_2 = 3)$

$\Rightarrow Pr(x_1 = 1, x_2 = 3) + Pr(x_1 = 2, x_2 = 3)$

$$= \frac{1 + 2(3)}{45} + \frac{2 + 2(3)}{45} = \frac{15}{45}$$

(2) $Pr(x_1 = 1, x_2 \leq 2)$

$\Rightarrow Pr(x_1 = 1, x_2 = 1) + Pr(x_1 = 1, x_2 = 2)$

$$= \frac{1 + 2(1)}{45} + \frac{1 + 2(2)}{45} = \frac{8}{45}$$

(٤-١)

٤ افرض ان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع المشتركة

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x\,y & 0<x<4 \,,\, 1<y<5 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

المطلوب :- ① ايجاد قيمة الثابت c

② جد $f(x)$, $f(y)$

③ $Pr(1<x<2 \,,\, 2<y<3)$

④ $Pr(x \geq 3 \,,\, y \leq 2)$

الحل

① $$\int_1^5 \int_0^4 c\,x\,y \, dx \, dy = 1$$

$$c \int_1^5 y \int_0^4 x \, dx \, dy = 1$$

$$c \int_1^5 y \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 \, dy = 1$$

$$c \int_1^5 y \cdot [8] \, dy = 1 \Rightarrow 8c \int_1^5 y \, dy = 1$$

$$\Rightarrow 8c \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_1^5 = 1 \Rightarrow 8c \left[\frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right] = 1$$

$$\Rightarrow 8c \left[\cancel{\frac{24}{2}}_{12} \right] = 1 \Rightarrow 96c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{96}}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{96}\,x\,y & 0<x<4 \,,\, 1<y<5 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

(1.0)

② $f(x) = \int_y f(x,y)\, dy$

$$= \frac{1}{96} x \int_1^5 y \, dy$$

$$= \frac{1}{96} x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_1^5 \Rightarrow \frac{1}{96} x \left[\frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{2}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{12}^{1}}{\cancel{96}_{8}} x = \frac{x}{8}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 < x < 4 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$f(y) = \int_x f(x,y)\, dx$

$$= \frac{1}{96} y \int_0^4 x \, dx \Rightarrow \frac{1}{96} y \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{1}{96} y [8]$$

$$= \frac{y}{12}$$

$$\therefore f(y) = \begin{cases} \frac{y}{12} & 1 < y < 5 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

③ $Pr(1 < X < 2 \;,\; 2 < Y < 3) = \int_2^3 \int_1^2 f(x,y)\, dx\, dy$

$$= \frac{1}{96} \int_2^3 y \int_1^2 x \, dx\, dy \Rightarrow \frac{1}{96} \int_2^3 y \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{96} \int_2^3 y \cdot \left[2 - \frac{1}{2} \right] dy$$

(١-٦)

$$\Rightarrow \frac{1}{96}\cdot\frac{3}{2}\int_2^3 y\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{96}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_2^3 \Rightarrow \frac{3}{(2)(96)}\left[\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(2)(96)}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{128}$$

④ $Pr(X \geq 3, Y \leq 2) = \int_1^2\int_3^4 \frac{1}{96}xy\,dx\,dy$

$$\frac{1}{96}\int_1^2 y\int_3^4 x\,dx\,dy$$

$$\frac{1}{96}\int_1^2 y\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_3^4 dy = \frac{1}{(96)(2)}\int_1^2 y\cdot[16-9]\,dy$$

$$= \frac{7}{(96)(2)}\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^2 = \frac{7}{128}$$

واجب بيتي :-

① اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة بالشكل الاتي :-

$$f(x,y) = \begin{cases} 9x^2y^2 & 0<x,y<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

المطلوب : ① ايجاد التوزيع الحدي (الهامشي) لكل من X و Y.

② $Pr(X \leq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2})$

② اذا كان لدينا

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & 0<x_1,x_2<\infty \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

برهن هل ان $f(x_1,x_2)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة ؟ (1.0)

conditional probability distribution التوزيع الاحتمالي الشرطي

ان مفهوم التوزيع الاحتمالي الشرطي يقترن بمفهوم الاحتمال الشرطي لاي حدثين مثل E_1 و E_2 فإن احتمال وقوع الحادثة E_1 بشرط ان الحادثة B قد وقعت هو:-

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad , \quad P(E_2) > 0$$

اي انه حاصل قسمة الاحتمال المشترك على الاحتمال الهامشي (الحدي)، وبمفهوم المتغيرات العشوائية نفرض ان X و Y متغيرات عشوائيه لهما التوزيع الاحتمالي المشترك $f(X,Y)$ ودالة الاحتمال الهامشيه (الحدية) $f(X)$ ، $f(Y)$ على التوالي، وعليه فإنه لايجاد التوزيع الاحتمالي لـ X عندما تكون Y معطاة مسبقاً اي انه بشرط ان تكون Y معلومة فإن التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ X يعرف كالآتي:-

$$f(X | Y) = \frac{f(X,Y)}{f(Y)}$$

والتوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y يعرف كالآتي:-

$$f(Y | X) = \frac{f(X,Y)}{f(X)}$$

اذا كان X ، Y متغيرات عشوائيات من النوع المتقطع فإن $f(x|y)$ تسمى بدالة الكتلة الاحتمالية الشرطية لـ X عندما Y معلومة وتحقق الشرطين الآتيين:-

① $f(x|y) \geq 0$

② $\sum_{x} f(x|y) = 1$

واذا كان X ، Y من النوع المستمر فإن $f(x|y)$ تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية الشرطية لـ X عندما Y معلومة وتحقق الشرطين الآتيين:-

① $f(x|y) \geq 0$

② $\int_{x} f(x|y)\, dx = 1$

مثال:- نفترض لدينا دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$f(x,y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

إيجاد ① التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ X .

② التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y .

H.W.

(حل)

① $f(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)}$

$f(y) = \sum_{x} f(x,y)$

x \ y	0	1	f(x)
0	1/3	1/3	2/3
1	0	1/3	1/3
f(y)	1/3	2/3	1

التوزيع الحدي لـ X

X	0	1
f(x)	2/3	1/3

التوزيع الحدي لـ Y

Y	0	1
f(y)	1/3	2/3

$f(x \mid y=0)$

X	0	1
$f(x \mid y=0)$	$\dfrac{f(0,0)}{f(0)} = \dfrac{\cancel{1/3}}{\cancel{1/3}} = 1$	$\dfrac{f(1,0)}{f(0)} = \dfrac{0}{\frac{1}{3}} = 0$

$f(x \mid y=1)$

X	0	1
$f(x \mid y=1)$	$\dfrac{f(0,1)}{f(1)} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{f(1,1)}{f(1)} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} = \dfrac{1}{2}$

محاضرة ٢٦ ع

مثال ٤: اذا كان X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة الآتية :-

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0 \ , y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

اوجد التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y .

الحل

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$$

$$f(x)=\int_{y} e^{-(x+y)}\,dy = e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy$$

$$= -e^{-x}\left[e^{-y}\right]_0^{\infty} \Rightarrow -e^{-x}\left[0-1\right] = e^{-x}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$f(y|x)=\frac{\cancel{e^{-x}}\,e^{-y}}{\cancel{e^{-x}}} = e^{-y}$$

$$\therefore f(y|x)=\begin{cases} e^{-y} & x>0 \ , y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

Conditional expectation — التوقع الشرطي :

لتكن لدينا $f(X,Y)$ الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين X, Y ، $f(X|Y)$ الدالة الاحتمالية الشرطية لـ X عندما Y معلومة عندئذٍ يعرف التوقع الشرطي لـ X عندما Y معلومة كالآتي :

$$E(X|Y) = \sum_{X} X \cdot f(X|Y)$$ X متقطع

$$E(X|Y) = \int_{X} X \cdot f(X|Y)\, dx$$ X مستمر

التوقع الشرطي لـ Y عندما X معلومة يكون كالآتي :

$$E(Y|X) = \sum_{Y} Y \cdot f(Y|X)$$ Y متقطع

$$E(Y|X) = \int_{Y} Y \cdot f(Y|X)\, dy$$ Y مستمر

مثال :- بالرجوع الى مثال ١ باعتراض لدينا دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$f(X,Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

المطلوب ① إيجاد التوقع الشرطي لـ X عندما $Y = 0,1$

② التوقع الشرطي لـ Y عندما $X = 0$

ح٢١.س.

الحل

①

$$E(X \backslash Y=1) = \sum_{X=0}^{1} X \cdot f(X \backslash Y=1)$$

X	0	1
$f(X \backslash Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X \backslash Y=1) = (0)*(\tfrac{1}{2}) + (1)*(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

$$E(X \backslash Y=0) = \sum_{X=0}^{1} X \cdot f(X \backslash Y=0)$$

X	0	1
$f(X \backslash Y=0)$	1	0

$$E(X \backslash Y=0) = (0)(1) + (1)(0) = 0$$

مثال عن بالرجوع الى مثال ٤:

$$f(X,Y) = \begin{cases} e^{-(X+Y)} & 0 < X,Y < \infty \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد التوقع الشرطي لـ Y.

(١١٣)

(الحل)

$$E(Y|X) = \int_{y} y \cdot f(y|x)\, dy$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \quad , f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{\cancel{e^{-x}}\, e^{-y}}{\cancel{e^{-x}}} = e^{-y}$$

$$\therefore E(y|x) = \int_{0}^{\infty} y\, e^{-y}\, dy$$

بالتجزئة يكامل

Let

$u = y \qquad du = dy$

$dv = e^{-y} \qquad v = -e^{-y}$

$uv - \int v\, du$

$$\underbrace{-y e^{-y} \Big|_0^{\infty}}_{zero} + \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy \Rightarrow -e^{-y} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow -[0 - 1] = \underline{\underline{1}}$$

$$\therefore E(Y|X) = \underline{\underline{1}}$$

محاضرة ٢٧ :-

التغاير والارتباط بين المتغيرات العشوائية :-

التغاير :- اذا كان لدينا X , Y متغيران عشوائيان والدالة الاحتمالية المشتركة لهما $f(X,Y)$ وتوقع كل متغير μ_X , μ_Y على الترتيب.

فإن التغاير (covariance) بين X , Y يرمز له بالرمز $cov(X,Y)$ ويعرف كالآتي :-

$$cov(X,Y) = E\Big(\underbrace{X-\mu_X}_{E(X)}\Big)\Big(\underbrace{Y-\mu_Y}_{E(Y)}\Big)$$

اذا كان المتغيران X , Y متغيرات عشوائية متقطعة فإن :-

$$cov(X,Y) = \sum_X \sum_Y (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\, f(X,Y)$$

واذا كان X , Y متغيرات عشوائية مستمرة فإن :-

$$cov(X,Y) = \int_Y \int_X (X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

نظرية :- اذا كان X , Y متغيران عشوائيان توقع كل منهما μ_X , μ_Y على الترتيب فإن

$$cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$= E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

البرهان :-

$$cov(X,Y) = E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$$

$$= E[XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X \mu_Y]$$

$$= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + \mu_X \mu_Y)$$

$$= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \cancel{\mu_X \mu_Y} + \cancel{\mu_X \mu_Y}$$

$$= E(XY) - \mu_X \mu_Y$$ وهو المطلوب اثباته.

مبرهنة :- اذا كان X , Y متغيران عشوائيان مستقلان (independence) فإن

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \quad , \quad cov(X,Y) = Zero$$

البرهان :-

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

وبما ان X,Y مستقلان فإن

$$cov(X,Y) = E(X)\cdot E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

* خواص التغاير

اذا كان X , Y متغيران عشوائيان ، a,b,c ثوابت فإن :-

1) $cov(C, X) = 0$

2) $cov(X, X) = var(X) = v(X) = \sigma_X^2$

3) $cov(X, y) = cov(y, X)$

4) $cov(x, y) = 0$ (x, y are independent) مستقلان

5) $cov(aX, by) = ab\ cov(X, y)$

البرهان :

1) $cov(c, X) = E(cX) - E(c) \cdot E(X)$

$= c\ E(X) - c\ E(X) = 0$

2) $cov(X, X) = E(X^2) - E(X) \cdot E(X)$

$= E(X^2) - (E(X))^2 = v(X)$

3) $cov(X, y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$= E(YX) - E(Y) \cdot E(X) = cov(Y, X)$

4) $cov(X, Y) = E(Xy) - E(X) \cdot E(y)$

بما ان x, y مستقلان فإن

$= E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0$

5) $cov(aX, bY) = E(ab\,XY) - E(aX) \cdot E(bY)$

$= ab\ E(XY) - ab\ E(X) \cdot E(Y)$

$= ab\ [E(XY) - E(X) \cdot E(Y)] = ab\ cov(X, Y)$

محاضرة ٨ ٢٨-١-

ملاحظة: اذا كان X, Y متغيرات عشوائيات فإن

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

البرهان:

$$V(X+Y) = E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2$$

$$\Rightarrow E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E^2(X) - 2E(X)E(Y) - E^2(Y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{E(X^2) - E^2(X)}_{\text{or } [E(X)]^2} + \underbrace{E(Y^2) - E^2(Y)}_{} + 2\underbrace{[E(XY) - E(X)E(Y)]}_{}$$

$$\Rightarrow V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

وهو المطلوب.

س١ : اذا كان X, Y متغيرات عشوائية اثبت ان

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,cov(X,Y)$$

مبرهنة: اذا كان X , Y متغيران عشوائيان مستقلان فإن

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

البرهان:

حسب المبرهنة السابقة

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

وبما ان X , Y متغيرات مستقله فإن $cov(X,Y)=0$ ولذا فإن:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

بصورة عامة لاي متغيران مستقله $X_1, X_2, ---, X_n$ فإن:-

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

معامل الارتباط:-

اذا كان X , Y متغيرات عشوائيه فإن معامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز $\rho(X,Y)$ يعرف كالآتي:-

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

اذ ان σ_X يمثل الانحراف المعياري (جذر التباين) لـ X .

σ_Y " " " (" ") لـ Y .

خواص معامل الارتباط :-

① $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$

اذا كان :

$\rho = 1$ (ارتباط تام طردي)

$\rho = -1$ (ارتباط تام عكسي)

$\rho = 0$ (لا يوجد ارتباط)

وهذا يظهر في حالة اذا كان X,Y متغيرات مستقلة .

② $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$

$$\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y} = \frac{cov(Y,X)}{\sigma_Y \, \sigma_X}$$

③ $\rho(X,X) = 1$

$$\frac{cov(X,X)}{\sigma_X \, \sigma_X} = \frac{V(X)}{\sigma_X^2} = \frac{\cancel{\sigma_X^2}}{\cancel{\sigma_X^2}} = 1$$

④ H.W. $\rho(X,-X) = -1$

⑤ $\rho(X,Y) = 0$ اذا كان X,Y مستقلان

$$\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$$

مثال توضيحي عن التغاير والارتباط .

مثال :- اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x+y & 0<x<1 \quad , 0<y<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

المطلوب: ١ ايجاد التغاير بين (X,Y)

٢ ايجاد الارتباط بين (X,Y)

H.W.

الحل

① $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy \cdot (2x+y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2x^2y + xy^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[2y\frac{x^3}{3} + y^2\frac{x^2}{2} \right]\Big|_0^1 dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}y^2\right) dy$$

$$\Rightarrow \left(\cancel{\frac{2}{3}}\frac{y^2}{\cancel{2}} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

(١٢١) $\therefore E(XY) = \frac{1}{2}$

ولإيجاد كل من $E(X)$ و $E(Y)$ لابد من ايجاد التوزيع الهامشي لكل من X و Y على الترتيب وكالآتي :-

$$f(x) = \int_0^1 (2x+y)\,dy$$

$$= 2xy + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \Rightarrow 2x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4x+1) & 0<x<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot (4x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[4 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

$$E(Y) = \int_0^1 Y \cdot f(Y)\, dY$$

$$f(Y) = \int_0^1 (2X + Y)\, dX$$

$$= \left(\cancel{2}\frac{X^2}{\cancel{2}} + XY\right)\Big|_0^1 = (1 + Y)$$

$$\therefore f(Y) = \begin{cases} (1+Y) & 0 < Y < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_0^1 Y(1+Y)\, dY$$

$$= \left[\frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore \operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{11}{12}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{55}{72} = -0.26$$

② $$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

H.w.

(٣٣)

المحاضرة ٢٩ :-

الدالة المولدة للعزوم

Moment Generating function (m.g.f.)

افرض ان x متغير عشوائي له دالة احتمالية $f(x)$ وان

(t) متغير اخر و r عدد موجب بحيث انه $-r < t < r$

ووفق هذه المعطيات تعرف الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي

X والتي يرمز لها بالرمز $M_x(t)$ بانها القيمة المتوقعة للدالة

(e^{tx}) اي ان :-

$$M_x(t) = E e^{tx} = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & \text{اذا كان } X \text{ متغير متقطع} \\ \int_x e^{tx} f(x)\, dx & \text{اذا كان } X \text{ متغير مستمر} \end{cases}$$

وكيفية الحصول على عزوم المتغير العشوائي X من الدالة

المولدة للعزوم هي :-

① نشتق الدالة المولدة للعزوم نسبة الى t مشتقة اولى ونساويها $(t=0)$ نحصل على $E(x)$.

② نشتق الدالة المولدة للعزوم نسبة الى t مشتقة ثانية ونساويها $(t=0)$ نحصل على $E(x^2)$.

أي :-

$$\left.\frac{\partial \mu_x(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = E(X) = \mu_x'(t)$$

$$\left.\frac{\partial^2 \mu_x(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = E(X^2) = \mu_x''(t)$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{\partial^r \mu_x(t)}{\partial t^r}\right|_{t=0} = E(X^r) \quad \mu_x^{r}(t)$$

مثال: افرض ان X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية بالشكل الاتي :-

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

المطلوب: ① إيجاد الدالة المولدة للعزوم ؟
② التوقع الرياضي من خلال الدالة المولدة للعزوم .

الحل

① $$\mu_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot 2e^{-2x}\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\infty e^{tx} e^{-2x}\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\infty e^{-x(2-t)}\, dx$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{(2-t)} \cdot e^{-x(2-t)} \Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2-t}\left[0-1\right] = \frac{2}{2-t} = \mu_x(t) = 2(2-t)^{-1}$$

(2)

$$E(x) = \mu'_x(t) = \frac{\partial \mu_x(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

$$= -2(2-t)^{-2} \cdot (-1) = \frac{2}{(2-t)^2}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = E(x)$$

$$V(x) = \underline{\underline{E x^2}} - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \mu''_x(t) = \frac{\partial^2 \mu_x(t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$$

$$= -4(2-t)^{-3} \cdot (-1) = \frac{4}{(2-t)^3}\Big|_{t=0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore V(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

نظريات مهمة في الدالة المولدة للعزوم .

1. $$M_{aX}(t) = M_X(at)$$ ثابت $\in (a)$,

2. $$M_{aX+b}(t) = M_X(at) \cdot e^{bt}$$ ثوابت (a, b)

3. $$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{a}{b}t} \cdot M_X\left(\frac{t}{b}\right)$$

ملاحظة :- بصورة عامة فإن الدالة الاسية لأي متغير هي :-

$$e^{tX} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tX)^r}{r!}$$

$$= 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$$