$$P(A_3 | D) = \frac{P(D | A_3) \cdot P(A_3)}{P(D)} = \frac{(0.04)(0.125)}{0.0125}$$

$$= 0.465$$

(المحاضرة ١٨)

المتغير العشوائي (r.v) (Random variable

يعرف على انه قيم حقيقيه معرفة في فضاء الحالة (العينة) (ﺃ) ويقسم الى نوعين :-

① المتغير العشوائي المتقطع (Discreate random variable)

② المتغير العشوائي المستمر (Continous random variable)

* المتغير العشوائي المتقطع :

يسمى المتغير العشوائي بالمتقطع اذا كانت القيم محددة وقابلة للعد (countable) مثال :

$X = 1, 2, 3, ----$

العملة المعدنية (H, T) او

رمي زهرة النرد $= (1, 2, -- 6)$ او

* المتغير العشوائي المستمر :

يسمى المتغير العشوائي (r.v.) بالمستمر اذا كانت القيم غير محددة وغير قابلة للعد مثال :

$-\infty < X < \infty$

ضمن فترة

درجات الحرارة , او

$47°$

* دالة الكتلة الاحتمالية (Probability mass function)

اذا كان المتغير العشوائي متقطع فإن الدالة الاحتمالية تسمى بدالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) ومضاغها :-

$$f(x) = p(X = x) \quad , x \in S$$

i. $f(x) = p(X=x) \geq 0$

ii. $\sum_{all\ x} f(x) = \sum_{all\ x} p(X=x) = 1$

* دالة الكثافة الاحتمالية (probability density function)

اذا كان المتغير العشوائي مستمر فإن الدالة الاحتمالية تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f)

i. $f(x) = p(X=x) \geq 0$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

all x

مثال :- افرض ان X متغير عشوائي بالفضاء $R = \{x = 1, 2, 3, \dots\}$ وان دالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) لـ X هي كالاتي :-

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x \in R \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

اذا كانت $A = \{X : 1, 3, 5, \dots\}$ ، جد $P(X \in A)$

الحل

$$P(X \in A) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) + \dots$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \dots}_{\text{متوالية هندسية غير منتهية}}\Big]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3}$$

مثال ٤: بالرجوع الى مثال رمي العملة المعدنية مرتين

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

نفرض ان X عبارة عن متغير عشوائي يتم ايجاده من خلال كل حالاتي :-

عدم ظهور الصورة $X = 0 = \{TT\}$

ظهور الصورة مرة $X = 1 = \{HT, TH\}$

ظهور الصورة مرتين $X = 2 = \{HH\}$

وعليه فإن دالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) هي كالآتي :-

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ \frac{1}{4} & x = 2 \end{cases} \quad , \sum_{x=0}^{2} P(x) = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

مثال ٢ :- بالرجوع الى مثال رمي حجر النرد مرة واحدة

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وبإفتراض X عبارة عن متغير عشوائي يتم ايجاده من خلال S وعليه فإن

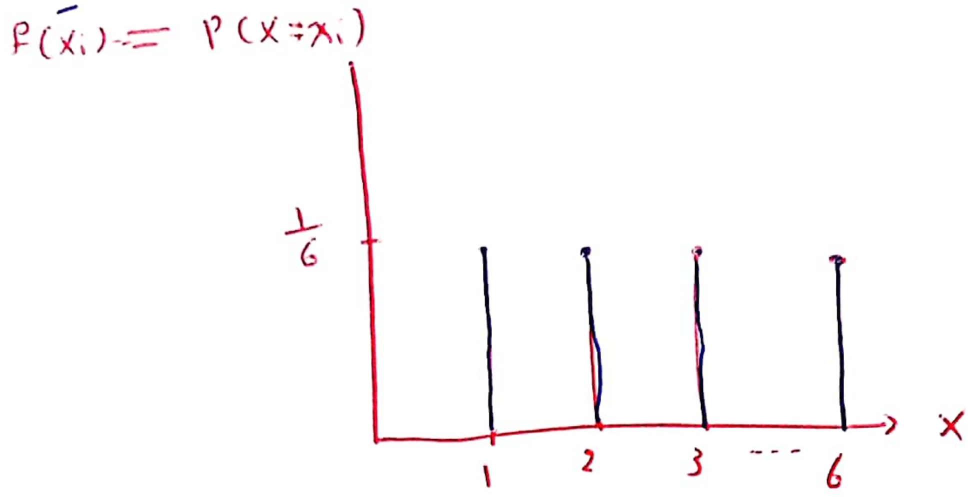
	$P(X)$
$X = 1$	$\frac{1}{6}$
$X = 2$	$\frac{1}{6}$
$X = 3$	$\frac{1}{6}$
$X = 4$	$\frac{1}{6}$
$X = 5$	$\frac{1}{6}$
$X = 6$	$\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ دالة الكتلة الاحتمالية لـ X هي كالآتي :-

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & X = 1 \\ \frac{1}{6} & X = 2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{6} & X = 6 \end{cases}$$

or $$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & X = 1, \dots, 6 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

وعليه فإن شكل دالة الكتلة الاحتمالية تكون كالآتي:-



مثال٢:- ألقي حجر النرد مرتين، افرض ان X متغير عشوائي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين اي ان $X(a,b)=a+b$ وافرض ان Y يمثل متغير عشوائي يمثل القيمة العظمى للرقمين الظاهرين $Y(a,b)=\max(a,b)$ ، المطلوب: إيجاد دالة الكتلة الاحتمالية $(p.m.f)$ لكل من المتغيرين العشوائيين X,Y وارسمهما.

الحل

من خلال مخطط الشجرة نجد فضاء الحالة (S) ، وعليه فإن فضاء الحالة (S) يكون كالآتي:-

$$
\begin{aligned}
S = \{ & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\
& (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\
& (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\
& (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\
& (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\
& (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \}
\end{aligned}
$$

$$\overset{a}{X}(\overset{b}{1},1) = \overset{a+b}{2} \quad , \dots \quad X(6,6) \overset{a+b}{=} \overset{a+b}{12}$$

$$\therefore R_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$f(2) = P(X=2) = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$f(3) = P(X=3) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$f(4) = P(X=4) = P(\{(3,1), (1,3), (2,2)\}) = \frac{3}{36}$$

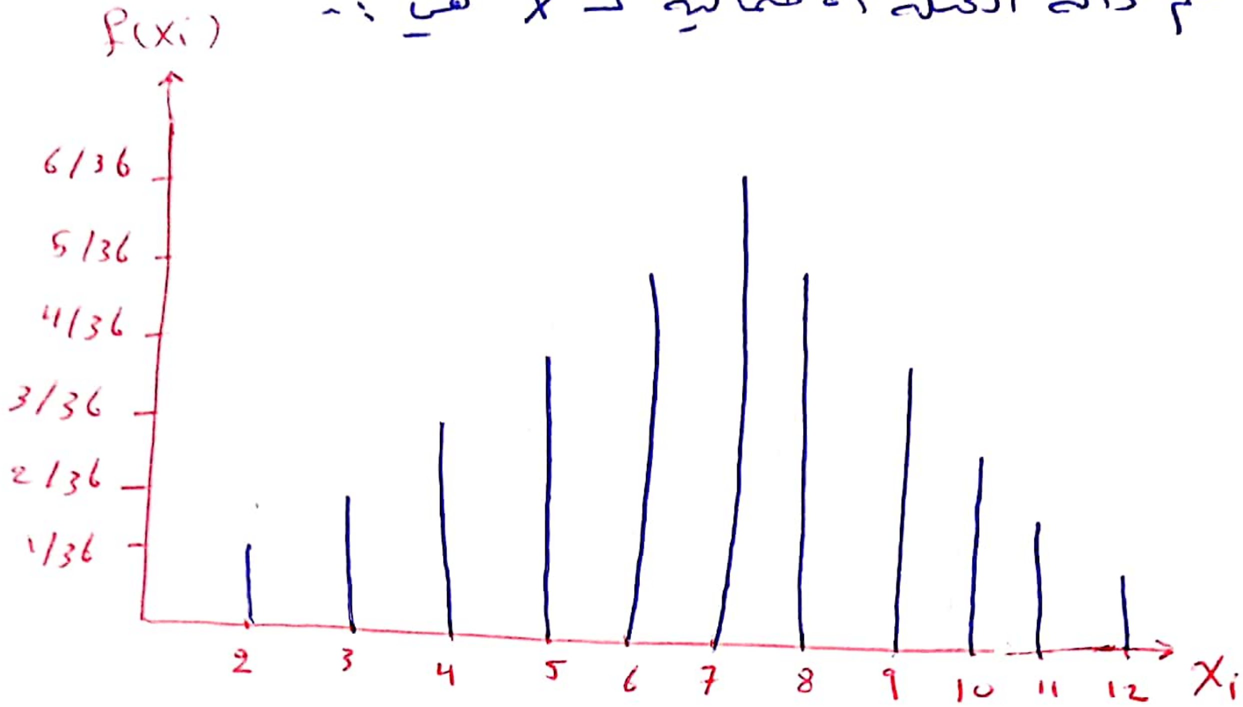
$$f(5) = P(X=5) = P(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} = \frac{4}{36}$$

$$f(6) = \frac{5}{36} \quad , f(7) = \frac{6}{36} \quad , \dots , f(12) = \frac{1}{36}$$

وعليه فإن دالة الكتلة الاحتمالية لـ X تكون كالآتي :-

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & X=2 \\ \frac{2}{36} & X=3 \\ \frac{3}{36} & X=4 \\ \frac{4}{36} & X=5 \\ \frac{5}{36} & X=6 \\ \frac{6}{36} & X=7 \\ 5/36 & X=8 \\ 4/36 & X=9 \\ \vdots & \vdots \\ 1/36 & X=12 \end{cases}$$

رسم دالة الكتلة الاحتمالية لـ X هي :-



$$Y(\underbrace{1,1}_{a,b}) = \underbrace{1}_{\max(a,b)} \quad , \ldots \quad Y(\underbrace{6,6}_{a\ b}) = \underbrace{6}_{\max(a,b)}$$

$$R_y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f(1) = P(Y=1) = P\{\{(1,1)\}\} = \frac{1}{36}$$

$$f(2) = P(Y=2) = P(\{(1,2),(2,1),(2,2)\}) = \frac{3}{36}$$

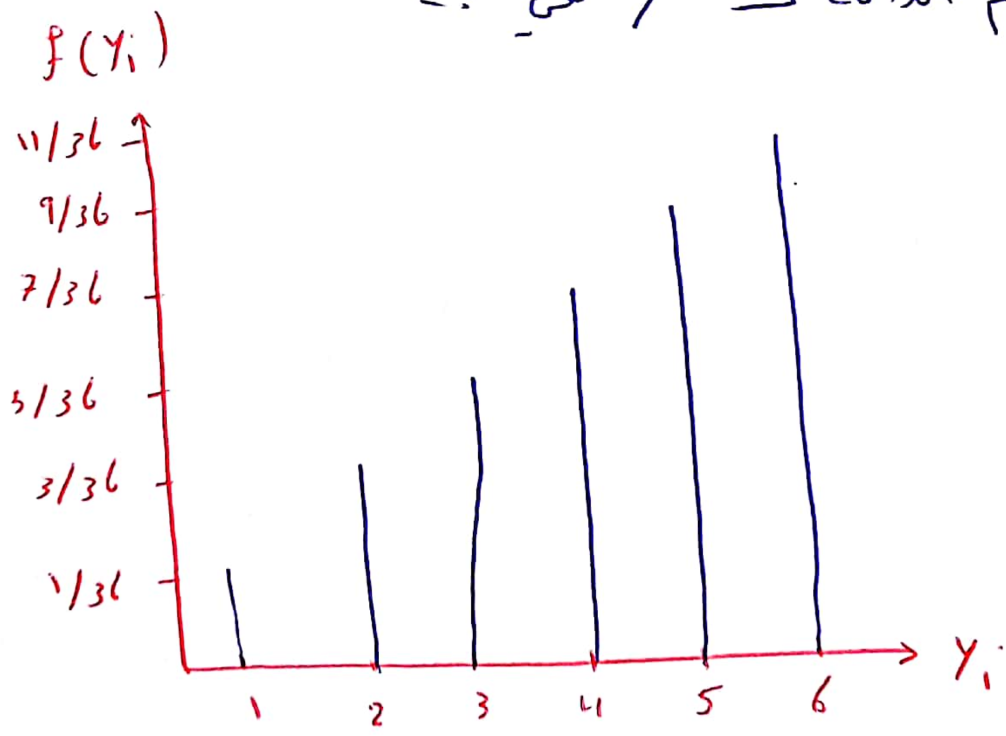
$$f(3) = P(Y=3) = P(\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\} = \frac{5}{36}$$

$$f(4) = P(Y=4) = \frac{7}{36} \quad , f(5) = \frac{9}{36} \quad , f(6) = \frac{11}{36}$$

وعليه فإن دالة الكتلة الاحتمالية لـ Y تكون كالآتي :-

$$f(Y_i) = P(Y = y_i) = \begin{cases} 1/36 & Y = 1 \\ 3/36 & Y = 2 \\ 5/36 & Y = 3 \\ 7/36 & Y = 4 \\ 9/36 & Y = 5 \\ 11/36 & Y = 6 \end{cases}$$

رسم الدالة لـ Y هي :-



المحاضرة ١٩

مثال :- اذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي :

$$f(x) = C^{x+1} \quad , \quad x = 0,1,2, \ldots \quad , \quad 0 < C < 1$$

المطلوب جد قيمة C .

الحل لإيجاد قيمة الثابت لابد من استخدام الخاصية الآتية :-

$$\sum_{\text{all } x} f(x) = 1$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} C^{x+1} = 1 \Rightarrow C^{0+1} + C^{1+1} + C^{2+1} + \cdots = 1$$

$$\Rightarrow C + C^2 + C^3 + \cdots = 1 \Rightarrow C\underbrace{[1 + C + C^2 + \cdots]}_{\text{متوالية هندسية غير منتهية}} = 1$$

$$\Rightarrow C * \left[\frac{1}{1-C}\right] = 1$$

$$\Rightarrow C = 1 - C \Rightarrow C + C = 1 \Rightarrow 2C = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \quad , \quad x = 0,1,2, \ldots$$

مثال :- اذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي كالآتي :-

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(X)$	$\frac{1}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{23}$

المطلوب ايجاد كل من $P(1 < X \leq 3)$ و $P(X \leq 1)$

الحل

$$P(1 < X \leq 3) = \sum_{X=2}^{3} f(X)$$

$$= f(2) + f(3) = \frac{5}{23} + \frac{2}{23} = \frac{7}{23}$$

$$P(X \leq 1) = \sum_{X=-4}^{1} f(X)$$

$$= f(-4) + f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)$$

$$= \frac{1}{23} + \frac{2}{23} + \frac{2}{23} + \frac{3}{23} + \frac{3}{23} + \frac{4}{23}$$

$$= \frac{15}{23}$$

طريقة ثانية

or

$$P(X \leq 1) = 1 - P(X > 1)$$

$$= 1 - \sum_{X=2}^{4} f(X) \Rightarrow 1 - [f(2) + f(3) + f(4)]$$

$$\Rightarrow 1 - \left[\frac{5}{23} + \frac{2}{23} + \frac{1}{23}\right]$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{8}{23} = \frac{15}{23}$$

امثلة متنوعة عن المتغير العشوائي المستمر

مثال: اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي كالآتي:-

$$f(x) = \begin{cases} c\,x(2-x) & 0<x<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

المطلوب ① إيجاد قيمة c ② $P(X>1)$

الحل

① $\int_{all\,x} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 c\,x(2-x)\,dx = 1$

$\Rightarrow c\int_0^2 (2x - x^2)\,dx \Rightarrow c\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 1$

$\Rightarrow c\left[\left(4 - \frac{8}{3}\right) - 0)\right] = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{4}$

وعليه فإن دالة الـ (p.d.f) لـ X تكون كالآتي:-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\,x(2-x) & 0<x<2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

② $P(X>1)$

$\int_1^2 f(x)\,dx \Rightarrow \frac{3}{4}\int_1^2 (2x - x^2)\,dx$

$\Rightarrow \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \Rightarrow \frac{3}{4}\left[\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right] \Rightarrow \frac{\cancel{3}}{4}\left[\frac{2}{\cancel{3}}\right] = \frac{1}{2}$$

H.W واجب :- اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X هي :-

$$f(x)=\begin{cases} k\,x\,e^{-x^2} & x>0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

المطلوب ① اوجد قيمة الثابت k ② احسب $P(X<3)$

ملاحظة :- اذا كان المتغير العشوائي مستمر فإن المساواة تكون غير مهمة في حدود الاحتمالية اي يعني

$$P(a<X<b) = P(a\le X<b) = P(a<X\le b) = P(a\le X\le b)$$

مثال :- اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{X+1}{8} & 2\le X\le 4 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

المطلوب :- ① هل الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية ؟

② اوجد احتمال $P(X<3.5)$

③ // // $P(2.4<X<3.5)$

والبقية.

الحل

① $\int_{2}^{4} f(x)\,dx \overset{?}{=} 1$

$\Rightarrow \int_{2}^{4} \left(\frac{x+1}{8}\right) dx \Rightarrow \left.\frac{x^2}{16} + \frac{x}{8}\right]_{2}^{4}$

$\Rightarrow \left(\frac{16}{16} + \frac{4}{8}\right) - \left(\frac{4}{16} + \frac{2}{8}\right)$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow 1 + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} = 1$

$\therefore f(x)$ is $\underline{p.d.f}$ دالة كثافة احتمالية.

② $P(X < 3.5)$

$\int_{2}^{3.5} \left(\frac{x+1}{8}\right) dx \Rightarrow \left.\frac{x^2}{16} + \frac{x}{8}\right]_{2}^{3.5}$

$\Rightarrow \left(\frac{12.25}{16} + \frac{3.5}{8}\right) - \left(\frac{4}{16} + \frac{2}{8}\right)$

$\Rightarrow (0.77 + 0.44) - 0.5$

$\Rightarrow \underline{0.71}$

مثال: نفرض ان المتغير العشوائي X له دالة كثافة احتمالية معرفة كالآتي:

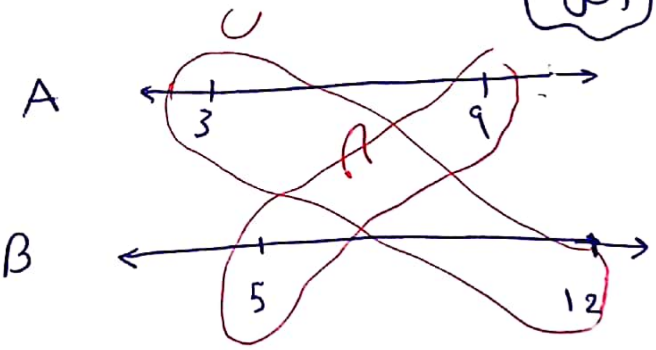
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad , \; 1 < x < \infty$$
$$\text{or} \quad x > 1$$

فإذا علمت ان:

$$A = \{x : 3 < x < 9\}$$
$$B = \{x : 5 < x < 12\}$$

اوجد $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(A)$ ، $P(B)$

الحل



$$P(A\cap B) = P(5 < X < 9)$$

$$P(A\cup B) = P(3 < X < 12)$$

$$P(A) = P(3 < X < 9)$$

$$P(B) = P(5 < X < 12)$$

$$P(A\cap B) = \int_5^9 \frac{1}{X^2}\, dX \Rightarrow -\frac{1}{X}\Big]_5^9 \Rightarrow -\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \underline{0.089}$$

$$P(A \cup B) = \int_{3}^{12} \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow -\frac{1}{x}\Big]_{3}^{12} = -\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \underline{0.25}$$

$$P(A) = \int_{3}^{9} \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow -\frac{1}{x}\Big]_{3}^{9} = \underline{0.22}$$

$$P(B) = \int_{5}^{12} \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow -\frac{1}{x}\Big]_{5}^{12} = \underline{0.11}$$

المحاضرة ٢٠

دالة التوزيع التراكمية (التجميعية)
Cumulative distribution function (c.d.f.)

تعرف هذه الدالة بأنها قيمة الاحتمال المتراكم لغاية قيمة معطاة من قيم المتغير العشوائي X، المعرف على فضاء الحالة (العينة) S ويرمز لهذه الدالة بالشكل $F(x)$ وتعرف رياضياً كما يلي :-

$$F(x) = Pr(\underbrace{X}_{r.v.} \leq x)$$

* خواص دالة التوزيع التراكمية (التجميعية) (c.d.f.)

① عبارة عن دالة غير متناقصة (مستمرة بالتزايد) اي انه اذا كانت $a \leq b$ فإن $F(a) \leq F(b)$

② $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ or $F(\infty) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ or $F(-\infty) = 0$

وهذا يعني ان $1 \geq F(x) \geq 0$

ملاحظة :- اذا كان المتغير العشوائي X متقطع له دالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) (f) فإن الدالة التراكمية F تعرف كالآتي :-

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

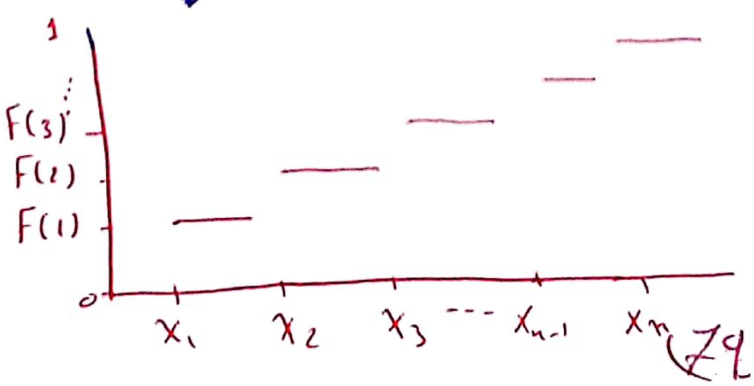
$$\text{or} \quad \sum_{t=-\infty}^{x} f(t)$$

واذا كان المتغير العشوائي X مستمر له دالة الكثافة الاحتمالية ($p.d.f$) (f) فإن الدالة التراكمية F تعرف كالآتي :-

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

وعليه فإن مخطط الدالة $F(X)$ في حالة المتغير العشوائي المتقطع يكون على شكل درج (مُدرج) وصولاً الى القيمة $F(X)$ المساوية للواحد ($F(X) = 1$) ، مثال:- افرض لديك دالة الكتلة الاحتمالية ($p.m.f.$) اوجد $F(X)$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & -\infty < X < X_1 \\ F(1) \quad f(X_1) & X_1 \leq X < X_2 \\ F(2) \quad f(X_1) + f(X_2) & X_2 \leq X < X_3 \\ F(3) \quad f(X_1) + f(X_2) + f(X_3) & X_3 \leq X < X_4 \\ \vdots & \\ F(n) \quad f(X_1) + \cdots + f(X_{n-1}) & X_{n-1} \leq X < X_n \\ 1 & X_n \leq X < \infty \end{cases}$$



واذا كان المتغير العشوائي X مستمر فإن شكل الدالة التوزيع التراكمية (c.d.f.) عبارة عن منحنى كالاتي:

$$Pr(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

* امثلة توضيحية .

مثال ١ :- اذا كان X متغير عشوائي له دالة الكتلة الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 1, 2, 3, \dots, 8 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

المطلوب : ايجاد $F(x)$ وارسمها.

الحل

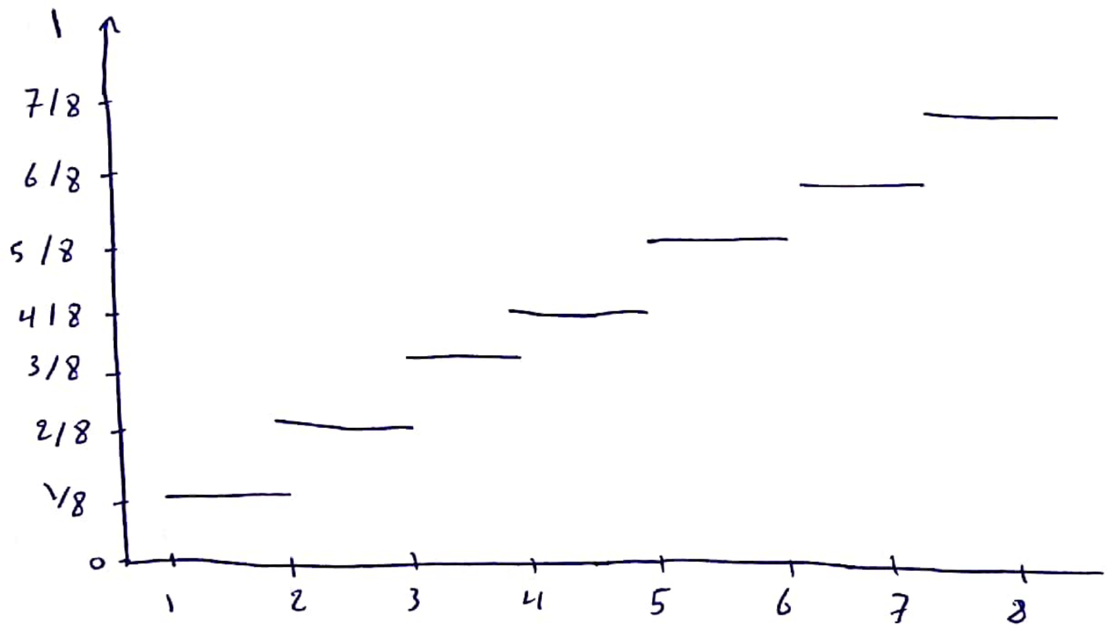
$$F(x) = Pr(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{x} f(t) = \frac{1}{8} x$$

$$F(1) = \frac{1}{8}, \quad F(2) = \frac{2}{8}, \quad \dots \quad F(8) = \frac{8}{8} = 1$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ F(1)\quad \frac{1}{8} & 1 \le x < 2 \\ F(2)\quad \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8} & 2 \le x < 3 \\ F(3)\quad \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8} & 3 \le x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ F(8)\quad 1 & 8 \le x < \infty \end{cases}$$

رسم $F(x)$



مثال ٤:- اذا كان لدينا دالة الكتلة الاحتمالية بالشكل الاتي :-

$$f(x)=\begin{cases} 1/4 & x=-2 \\ 2/8 & x=1 \\ 1/2 & x=2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

اوجد: الدالة التوزيع التراكمية (c.d.f.) ثم رسمها.

$$F(x) = Pr(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t)$$

$$F(-2) = Pr(X \le -2) = \sum_{t=-\infty}^{-2} f(t) = \frac{1}{4}$$

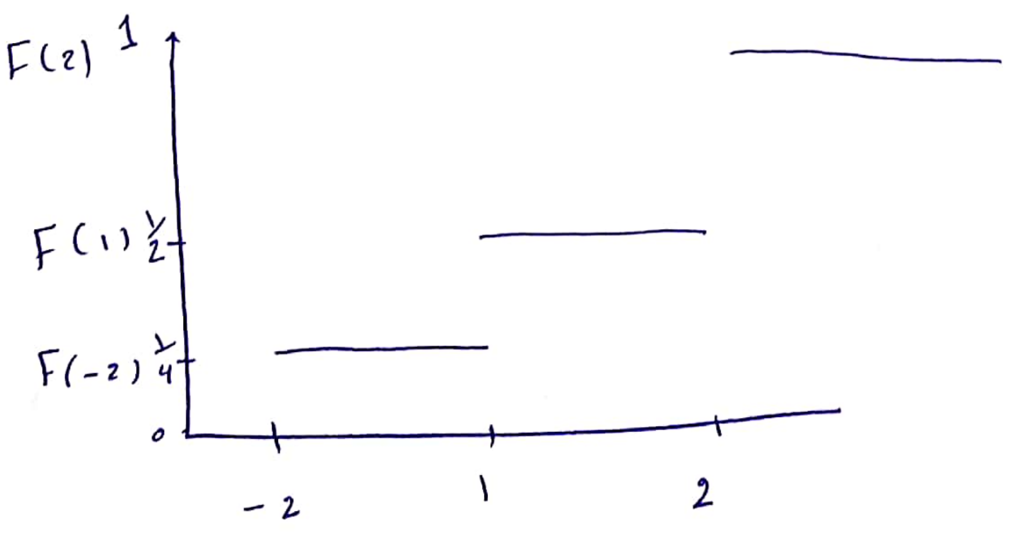
$$F(1) = Pr(X \le 1) = \sum_{t \le 1} f(t) = f(1) + f(-2)$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = Pr(X \le 2) = \sum_{t \le 2} f(t) = f(2) + f(1) + f(-2)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ \frac{1}{4} & -2 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x < \infty \end{cases}$$



مثال ٢ :- بالرجوع الى مثال رمي حجر النرد مرة واحدة .
اوجد دالة التوزيع التراكمية (c.d.f.) .

الحل

$S' = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1 \\ \frac{1}{6} & x = 2 \\ 1/6 & x = 3 \\ 1/6 & x = 4 \\ 1/6 & x = 5 \\ 1/6 & x = 6 \end{cases} \quad \underline{\underline{or}} \; f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1, \dots, 6 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) = \frac{x}{6}$$

$F(1) = \frac{1}{6}$, $F(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$, $F(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

$\dots\dots F(6) = \frac{6}{6} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ F(1) \quad \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ F(2) \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} & 2 \leq x < 3 \\ F(3) \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4} & 3 \leq x < 4 \\ \quad 4/6 & 4 \leq x < 5 \\ \quad \vdots & \\ F(6) \quad 1 & 6 \leq x < \infty \end{cases}$$

H.W.: لتكن لدينا

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k} & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

المطلوب: ① ايجاد قيمة الثابت k.

② ايجاد دالة التوزيع التراكمية (التجميعية) وارسمها.

مثال ٤: اذا كان X متغير عشوائي له دالة الكثافة الاحتمالية $(p.d.f)$ كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

المطلوب: ① اوجد $F(x)$ وارسمها.

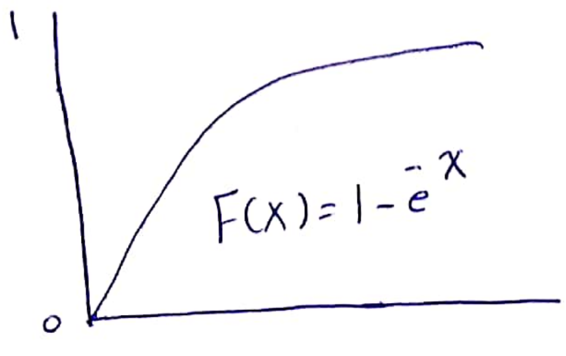
② $F(3)$ ، $F(5)$ ، $Pr(1 \leq x \leq 3)$

الحل

①
$$F(x) = Pr(X \leq x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{x} e^{-t}\, dt = -e^{-t} \Big|_{0}^{x}$$

$$= -\left[e^{-x} - e^{-0}\right] = \boxed{1 - e^{-x}}$$



٤

$$F(3) = \Pr(X \leq 3) = \int_0^3 e^{-\cancel{x}}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^3$$

$$= \underline{\underline{1 - e^{-3}}} = ?$$

$$F(5) = \Pr(X \leq 5) = \int_0^5 e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^5 = \underline{\underline{1 - e^{-5} = ?}}$$

$$\Pr(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1})$$

$$= \underline{\underline{e^{-1} - e^{-3} = 0.318}}$$

س-11 :- لتكن لديك

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 1 < x < 3 \\ 0 & 0 \text{ ،ω} \end{cases}$$

اوجد $F(x)$ وارسمها .

المحاضرة ٢١ :-

التوقع الرياضي (Mathematical Expectation)

يعتبر مفهوم التوقع الرياضي من المفاهيم الاساسية في نظرية الاحتمال ، إذ ان التوقع الرياضي لمتغير عشوائي يعني التوقع النظري للسلوك المستقبلي للمتغير. ويرمز لهذه العملية بالرمز $E(X)$ أو μ_X إذ ان :

$E(X)$: يسمى بالتوقع الرياضي او متوسط المتغير العشوائي X.

• التوقع الرياضي في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة :

اذا كان لدينا متغير عشوائي متقطع X وله دالة كتلة احتمالية فإن التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) للمتغير العشوائي X يكون كالآتي :-

$$E(X) = \sum_{\text{all } x} x \cdot f(x) = \mu_x$$

وبصورة عامة اذا كان لدينا متغير عشوائي متقطع ولكن $u(x)$ فإن :-

$$E(u(x)) = \sum u(x) \cdot f(x)$$

• التوقع الرياضي في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة .

نفترض لدينا متغير عشوائي مستمر X وله دالة كثافة احتمالية فإنه التوقع الرياضي (القيمة المتوقعه) للمتغير العشوائي X يكون كالآتي :-

$$E(X) = \int_{\text{all } x} x \cdot f(x) \cdot dx$$

وبصورة عامة اذا كان لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن $u(x)$ فان:-

$$E(u(x)) = \int u(x) \cdot f(x)\, dx$$

* الخصائص الاساسية للتوقع الرياضي.

١- اذا كان لدينا ثابت وليكن K فان:

$$E(K) = K$$

٢- اذا كان لدينا ثابت ~~وليكن~~ K ومتغير عشوائي X فان:

$$E(K \cdot X) = K \cdot E(X)$$

٣- اذا كان لدينا ثابتين K_1 و K_2 ومتغيرين عشوائيين X و Y فانه:

$$E(K_1 X + K_2 Y) = K_1 E(X) + K_2 E(Y)$$

* امثلة توضيحية للتوقع الرياضي في حالة المتغير العشوائي المتقطع والمستمر.

مثال ١: في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وبفرض ان X يمثل عدد النقاط على وجه الحجر بعد استقراره اوجد التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) لـ X.

الحل

$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{X=1}^{6} X \cdot f(X)$$

$$= (1)\cdot(\tfrac{1}{6}) + (2)(\tfrac{1}{6}) + (3)(\tfrac{1}{6}) + \cdots + (6)\cdot(\tfrac{1}{6})$$

$$= 3.5$$

مطلب اضافي لمثال اوجد $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{X=1}^{6} X^2 \cdot f(X)$$

$$= (1)^2(\tfrac{1}{6}) + (2)^2(\tfrac{1}{6}) + (3)^2(\tfrac{1}{6}) + (4)^2(\tfrac{1}{6}) + (5)^2(\tfrac{1}{6}) + (6)^2(\tfrac{1}{6})$$

$$= ?$$

مثال ٢: - اذا كان لدينا دالة الكتلة الاحتمالية بالشكل الاتي:

X	0	1	2	3
$f(X)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

المطلوب ، $E(X)$ ، $E(X^2)$ ، $E(3X^3)$ H.w. ، $E(3+X)$ H.w.

الحل

$$E(X) = \sum_{X=0}^{3} X \cdot f(X)$$

$$= (0)(\tfrac{1}{4}) + (1)(0) + (2)(\tfrac{1}{4}) + (3)(\tfrac{1}{2}) = ٢$$

$$E(X^2) = \sum_{X=0}^{3} X^2 \cdot f(X)$$

$$E(X^2) = (0)^2\left(\frac{1}{4}\right) + (1)^2(0) + (2)^2\left(\frac{1}{4}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

مثال ٢ :- افرض ان X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية التالية :-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 2 < X < 8 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

اوجد $E(X), E(X^3)$

الحل

$$E(X) = \int_2^8 X \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{6}\int_2^8 x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{X^2}{2}\Big|_2^8\right] \Rightarrow \frac{1}{6}\left[\frac{64}{2} - \frac{4}{2}\right] = 5$$

$$E(X^3) = \int_2^8 X^3 \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{6}\int_2^8 x^3\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{X^4}{4}\Big|_2^8\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{4096}{4} - \frac{16}{4}\right] = 170$$

$=$

مثال ٤ :- تفرض ان

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 < x < 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد $E(x(5-x))$

الحل :-

$$E(x(5-x)) = E(5x - x^2)$$

حسب خاصية التوقع الرياضي ثابت

$$E(5x - x^2) = \underbrace{5\,E(x)}_{\text{الحد الاول}} - \underbrace{E(x^2)}_{\text{الحد الثاني}}$$

الحد الاول

$$5\,E(x) = 5 \cdot \int_0^5 x \cdot f(x)\,dx$$

$$= \cancel{5} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} \int_0^5 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^5 = \boxed{\frac{25}{2}}$$

الحد الثاني

$$E(x^2) = \int_0^5 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^5 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^5\right] = \frac{1}{\cancel{5}}\left[\frac{\cancel{125}^{\,25}}{3}\right] = \frac{25}{3}$$

$$\therefore E(5x - x^2) = \frac{25}{2} - \frac{25}{3} = 25\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= 25\left[\frac{3-2}{6}\right] = \boxed{\frac{25}{6}}$$

المحاضرة ٢٢ :-

التباين (Variance)

عبارة عن توقع مربع الانحراف عن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X . ويرمز لهذه العملية بالرمز $V(X)$ أو σ_X^2 أو ع²

الصيغة الرياضية للتباين هي كالآتي :-

$$V(X) = E(X - E(x))^2$$
$$= E(X - \mu_x)^2$$

اذا كان X متغير عشوائي متقطع فإن :-

$$V(X) = \sum_{all\ x} (X - \underset{E(X)}{\mu_x})^2 \cdot f(x) = \sigma^2$$

اذا كان X متغير عشوائي مستمر فإنه :-

$$V(X) = \int_{all\ x} (X - \underset{E(X)}{\mu_x})^2 \cdot f(x)\, dx = \sigma^2$$

نظرية :- اذا كان X متغير عشوائي توقعه μ_x وله دالة الاحتمال $f(x)$ فإنه $V(X)$ تكون كالآتي :-

$$V(X) = E(X^2) - (E(x))^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

البرهان

$$V(X) = E(X-\mu_x)^2$$
$$= E(X^2 - 2X\mu_x + \mu_x^2)$$
$$= E(X)^2 - 2\mu_x E(X) + \mu_x^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu_x^2 + \mu_x^2 = E(X)^2 - \mu_x^2$$

ملاحظة: الانحراف المعياري: هو الجذر الموجب للتباين ويرمز له بالرمز σ $(\sigma = \sqrt{\sigma^2})$

* خواص التباين

1) اذا كان X متغير عشوائي وكانت لدينا $a, b, c, \ldots$ اعداد ثابتة حقيقية فإن:

$$V(k) = 0 \Rightarrow V(k) = E(k^2) - (E(k))^2$$
$$= k^2 - k^2 = 0$$

حسب خواص التوقع الرياضي.

2) $V(kX) = k^2 V(X)$

$$V(kX) = E(k^2X^2) - E^2(kX)$$

$E^2(kX)$ أو $(E(kX))^2$

$$= k^2 E(X^2) - k^2 E^2(X)$$
$$= k^2 [E(X^2) - E^2(X)]$$

$E^2(X)$ أو $(E(X))^2$

$$= k^2 V(X)$$

$$3)\ V(\underbrace{a\,X + b}_{\text{ثوابت}}) = a^2 V(X)$$

$$V(aX+b) = E(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2$$

$$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2$$

$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (a^2(E(X))^2 + 2abE(X) + b^2)$$

$$= a^2E(X^2) + \cancel{2abE(X)} + \cancel{b^2} - a^2(E(X))^2 - \cancel{2abE(X)} - \cancel{b^2}$$

$$= a^2[E(X^2) - (E(X))^2] = a^2 V(X)$$

مثال ١ :- القيت قطعة نقود ثلاث مرات . اوجد التوقع والتباين لعدد مرات ظهور الصورة ؟ .

$$S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$$

$$X = 0, 1, 2, 3$$

$X = 0$ عدم ظهور الصورة $\{T,T,T\}$, $X = 1$ ظهور الصوره مره واحده $= \{(H,T,T), (T,H,T), (T,T,H)\}$

$X = 2$ ظهور الصوره مرتين $= \{(H,H,T)\ (H,T,H)\ (T,H,H)\}$

$X = 3$ ظهور الصوره ثلاث مرات $= \{(H,H,H)\}$

وليم ثبات

X	0	1	2	3
$f(x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$$E(X) = \sum_{X=0}^{3} X \cdot f(X)$$

$$= (0)\left(\frac{1}{8}\right) + (1)\left(\frac{3}{8}\right) + (2)\left(\frac{3}{8}\right) + (3)\left(\frac{1}{8}\right) = \underline{\underline{1.5}}$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X)^2 - (E(X))^2$$

$$E(X)^2 = \sum_{X=0}^{3} X^2 \cdot f(X)$$

$$= (0)^2\left(\frac{1}{8}\right) + (1)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\sigma_X^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.75} = 0.866$$

الانحراف المعياري

مثال ٢ :- اذا كان X متغير عشوائي له دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

، ايجاد تباين الـ X

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \, dx = 2\int_0^1 x^3 dx = \cancel{2} \cdot \frac{x^4}{\cancel{4}_{2}} \Big|_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \mu_x = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{3} - 0 \right] = \frac{2}{3}$$

$$\therefore V(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

واجب بيتي

س ١ :- ① اذا كان لدينا دالة الكتلة الاحتمالية الاتية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

، المطلوب ايجاد الانحراف المعياري لـ X

② اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية الآتية

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

المطلوب ايجاد الانحراف المعياري لـ X