التوزيعات الاحتمالية المتقطعة
(Discrete probability distribution)

① التوزيع المنتظم المتقطع (discrete uniform distribution)

تتصف نتائج التوزيع المنتظم المتقطع بكونها ذات نفس الفرصة في الظهور على سبيل المثال حالة سحب عينة عشوائية من مجتمع محدود.

افرض ان X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم المتقطع والذي يوصف بالشكل الاتي:-

$$X \sim Ud(k)$$

وان دالة الكتلة الاحتمالية لـ X هي:-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & x = 1, \dots, k \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

وان:

$$E(X) = \frac{k+1}{2}, \quad var(X) = \frac{k^2-1}{12}, \quad F(X) = \frac{x}{k}$$

البرهان

$$E(X) = \sum_{x=1}^{k} x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{k} x \cdot \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{x=1}^{k} x \Rightarrow \frac{1}{k}\left[1+2+3+\dots+k\right]$$

$$E(X) = \frac{1}{\cancel{k}} \cdot \frac{\cancel{k}(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{k} x^2 \cdot f(x) \Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{x=1}^{k} x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{k}} \cdot \frac{\cancel{k}(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\therefore V(X) = \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4} = \frac{k^2-1}{12}$$

$$\underset{\downarrow}{F(x)} = \sum_{t=1}^{x} f(t) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{x} = \frac{1}{k} x$$

$Pr(X \le x)$

---

② توزيع برنولي (Bernoulli distribution)

يستخدم هذا التوزيع في التجارب التي تتضمن نتائجها حالتين فقط هي حالة النجاح التي تظهر باحتمالية مقدارها (P) وحالة الفشل التي تظهر باحتمالية مقدارها ($q = 1 - P$) .

على سبيل المثال عند فحص بطارية جافة لبيان مطابقتها للمواصفات المحددة من قبل الجهة المنتجة، واضح ان نتيجة الفحص هي اما ان تكون البطارية مطابقة للمواصفات أم غير مطابقة للمواصفات فإذا كان المتغير العشوائي (X) يشير الى مطابقة البطارية للمواصفات باحتمالية نجاح المحاولة مقدارها (P) (احتمال مطابقة البطارية للمواصفات) واحتمال الفشل مقدارها (q) وعليه يمكن تخصيص قيمتين للمتغير العشوائي (X) هما :

$(X=1)$ عند نجاح المحاولة و $(X=0)$ عند فشل المحاولة. اي ان:-

$$P(X=1)=p \quad , \quad P(X=0)=q=(1-p)$$

افرض ان (X) متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي والذي يوصف بالشكل الآتي:-

$$X \sim Ber(p)$$

وان دالة الكتلة الاحتمالية لـ X هي :-

$$f(x)=\begin{cases} p^{x}\underbrace{(1-p)^{1-x}}_{\text{or } q^{1-x}} & x=0,1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

إذ ان (p) تمثل معلمة التوزيع ، $0<p<1$ وان $p+q=1$

وان:-

$$E(x)=p \quad , \quad var(X)=pq=\sigma_x^2$$

$$M_x(t)=pe^t+q$$

البرهان

$$E(x)=\sum_{x=0}^{1} x.p^x(1-p)^{1-x}$$

$$=(0)p^0q^1+(1)p^1q^0=\underline{\underline{p}}$$

$V(X)$ H.W.

$$M_X(t) = E e^{tX} = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} \cdot p^x q^{1-x}$$

$$\Rightarrow e^0 p^0 q^1 + e^t p^1 q^0$$

$$\Rightarrow q + pe^t = M_X(t)$$

وبالإمكان إيجاد $E(X)$ و $E(X^2)$ و ... من خلال اشتقاق الدالة المولدة للعزوم بالنسبة الى t وبتعويض ($t=0$) بالناتج

$$E(X) = \frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = pe^t \Big|_{t=0} = pe^0 = \underline{p}$$

٢) توزيع ذي (ثنائي) الحدين Binomial Distribution

يعتبر توزيع ذي الحدين من اقدم التوزيعات الاحتمالية ذات اهمية كبيرة في معظم المجالات العلمية ويعد العالم (James Bernoulli (1654 - 1705) مكتشف هذا التوزيع عام (1700) ويعتبر هذا التوزيع حالة عامة لتوزيع برنولي عندما يكون عدد المحاولات اكثر من محاولة واحدة.

افرض ان لدينا n من المحاولات المستقلة لتجربة ذات ناتجين احدهما نجاح والاخر فشل بحيث في كل محاولة p هو احتمال النجاح و $(q = 1 - p)$ هو احتمال الفشل. فإذا كان ما يهمنا من هذه الـ n من المحاولات المستقلة لتجربة وقوع حدث معين x من المرات حيث ان x متغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح فان x يتوزع توزيع ذي الحدين وله دالة الكتلة الاحتمالية الاتية :-

$$F(x) = \begin{cases} C^n_x \; p^x \; (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

اذ ان n, p تمثلان معلمتي التوزيع ، بحيث ان n عدد صحيح موجب (عدد مرات إجراء التجربة) ، p تمثل النجاح في محاولة واحدة وان $0 < p < 1$ و q احتمال الفشل في محاولة واحدة.

وبالإمكان وصف المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين بالشكل الآتي :

$$X \sim b(n,p)$$

ملاحظة :- الحدود المتتالية لمفكوك ذي الحدين تكون كالآتي :-

$$\sum_{x=0}^{n} C_x^n \, p^x \, q^{n-x} = (p+q)^n = (1)^n = 1$$

الخصائص الرياضية للتوزيع

اذا كان $X \sim b(n,p)$ فإن :-

$$\underset{\text{التوقع الرياضي}}{E(X) = np} \qquad , \qquad \underset{\text{التباين}}{V(X) = npq} \qquad , \qquad \underset{\text{الدالة المولدة للعزوم}}{\mu_x'(t) = (pe^t+q)^n}$$

البرهان

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot C_x^n \, p^x \, q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \, p^x \, q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \, p \, p^{x-1} \, q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{n} \cancel{x} \cdot \frac{n\,(n-1)!}{\cancel{x}\,(x-1)!\,(n-x)!} \, p \, p^{x-1} \, q^{n-x}$$

$$\Rightarrow np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, q^{n-x}$$

let $k = x-1 \Rightarrow x = k+1$

$x = 1 \Rightarrow k = 0$

$x = n \Rightarrow k = n-1$

$$np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\, p^{k}\, q^{n-k-1}$$

$$np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_{k}^{n-1}\, p^{k}\, q^{n-k-1}}_{(p+q)^{n-1} = 1}$$

حسب العلاقة السابقة

$$\therefore E(X) = np$$

التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot C_{x}^{n}\, p^{x}\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\, q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{n} x^{\cancel{2}} \cdot \frac{n(n-1)!}{\cancel{x}(x-1)!(n-x)!}\, p\, p^{x-1}\, q^{n-x}$$

let $k = x-1 \Rightarrow x = (k+1)$

$$\Rightarrow x = 1 \quad , \quad k = 0$$

$$x = n \quad , \quad k = n-1$$

$$\Rightarrow np \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, C_{k}^{n-1}\, p^{k}\, q^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow np \left[\sum_{k=0}^{n-1} k\, C_{k}^{n-1}\, p^{k}\, q^{n-k-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_{k}^{n-1}\, p^{k}\, q^{n-k-1}}_{1} \right]$$

حسب العلاقة

$$\Rightarrow np \left[E(k) + 1 \right]$$

$$\Rightarrow np \left[(n-1)p + 1 \right]$$

$$\Rightarrow np \left[np - p + 1 \right]$$

$$\Rightarrow n^2p^2 - np^2 + np = E(x^2)$$

$$\therefore V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2}$$

$$\Rightarrow np(\underbrace{1-p}_{q})$$

$$\Rightarrow npq$$

الدالة المولدة للعزوم

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{n} C_x^n (e^t p)^x q^{n-x}$$

حسب المفكوك

$$\Rightarrow (pe^t + q)^n$$

مثال ٢) ألقيت قطعة نقود اربع مرات، افرضنا أن x يمثل عدد الصور

اوجد الاحتمالات التالية:-

① الحصول على ثلاثة صور بالضبط

② الحصول على ٣ صور على الاكثر.

③ الحصول على صورة واحدة على الاقل

واجب مهم

الحل

نلاحظ ان تجربة القاء قطعة النقود ٤ مرات تتبع توزيع ذي الحدين

وان احتمال النجاح $p = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ في محاولة واحدة.

$$\therefore X \sim b(4, \tfrac{1}{2})$$

① $Pr(X=3) = C_3^4 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{4-3} = \frac{1}{4}$

② $Pr(X \leq 3) = \underset{C_0^4 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^4}{Pr(X=0)} + \underset{C_1^4 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^3}{Pr(X=1)} + \underset{C_2^4 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^2}{Pr(X=2)} + \underset{C_3^4 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^1}{P(X=3)}$

or $1 - Pr(X=4) = 1 - C_4^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^0 = \frac{15}{16}$

(١٣٦)

٤ توزيع بواسون (poisson Distribution)

يعد هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الهامة في الكثير من التطبيقات الاحصائية ويسمى بتوزيع الحوادث النادرة الوقوع مثلاً: سقوط الطائرات ، حوادث الغرق ، خروج القطار عن السكة الحديدية .....

وان اول من اشتق هذا التوزيع العالم الفرنسي (simeon poisson) والذي تمكن من اشتقاق هذا التوزيع كحالة تقاربية من توزيع ثنائي الحدين اي عندما تكون قيمة الاحتمال p صغيرة و n كبيرة.

تعريف :- يقال ان X متغير عشوائي يتوزع توزيع بواسون وان دالة الكتلة الاحتمالية له تكون بالشكل الآتي :-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x = 0,1,2,3,\dots \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

اذ ان :-

λ تمثل معلمة التوزيع ، $\lambda > 0$

وبالامكان وصف المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون بالشكل الآتي :-

$$X \sim po(\lambda)$$

وان مجموع دالة الكتلة الاحتمالية يساوي واحد .

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \cancel{e^{-\lambda}}\, \cancel{e^{\lambda}} = 1$$

نظرية :- اذا كان $X \sim b(n,p)$ وكانت p صغيرة و n كبيرة بحيث ان $\lambda = np$ فان :-

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , x = 0, 1, ---$$

$$\lim_{n\to\infty} C_x^n\, p^x\, q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$\because \lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \quad , q = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

$$f(x) = C_x^n\, p^x\, q^{n-x} = C_x^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^x (n-x)!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \quad --- (*)$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^x (n-x)!} = \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)\cancel{(n-x)!}}{n\cdot n\cdot n\cdots n\ \cancel{(n-x)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)$$

$$= 1\cdot 1\cdot 1 \cdots 1 = 1 \quad \text{because } \frac{1}{\infty} = \text{zero} \quad \cdots (**)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda} \quad \cdots (***)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1 \quad \cdots (****)$$

وبتعويض (****) ، (***) ، (**) في (*) نحصل على الاتي :-

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

الخصائص الرياضية للتوزيع :-

اذا كان $X \sim Po(\lambda)$ فان :-

$E(X) = \lambda$ القيمة المتوقعة ، $V(X) = \lambda$ التباين ، $\mu_X(t) = e^{\lambda(e^{t}-1)}$ الدالة المولدة للعزوم

البرهان

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\cdot f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1} \cancel{x}\cdot \frac{\lambda^{x-1}\cdot\lambda}{\cancel{x}(x-1)!} \Rightarrow \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$\therefore E(X) = \lambda \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} = \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \cancel{x^2} \cdot \frac{\lambda^{x-1} \lambda}{x(x-1)!}$$

let $k = x - 1 \Rightarrow x = 1 + k$

$x = 1 \Rightarrow k = 0$

$x = \infty \Rightarrow k = \infty$

$$\therefore E(X^2) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right]$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}}_{E(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda(\lambda + 1)$$

$$\therefore V(X) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2$$

$$= \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda$$ = variance of X.

(١٤٠)

$$M_X(t) = E\, e^{tX}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{t})^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{t}}$$

$$= e^{\lambda(e^{t}-1)} = m.g.f \text{ of } X$$

واجب بيتي (ايجاد التوقع الرياضي والتباين من خلال استعمال الدالة المولدة للعزوم).

مثال: اذا كان $X \sim po(3)$ ، اوجد احتمال ① $Pr(X=2)$

② $Pr(X \geq 3)$

الحل

① $Pr(X=2) = \dfrac{e^{-3}(3)^{2}}{2!} = ?$

② $Pr(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{\infty} \dfrac{e^{-3}(3)^{x}}{x!}$

$$= 1 - Pr(X < 3)$$

$$= 1 - [Pr(X=0) + Pr(X=1) + Pr(X=2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-3}(3)^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}(3)^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}\, 3^{2}}{2!}\right] = ?$$

(١٤١)

مثال ٢ :- افرض ان هناك 220 خطأ مطبعي موزع توزيعاً عشوائياً في كتاب فيه 200 صفحة ، اوجد احتمال ان تحتوي صفحة معينة على :-

① ٠ خطأ ② ١ خطأ ③ ٢ خطأ او اكثر .

الحل

$\because n = 220 \quad , p = \frac{1}{200}$

بما انه حجم العينة كبير و p صغيرة فان :

$\lambda = np = \frac{220}{200} = 1.1$

① $Pr(X=0) = \frac{e^{-1.1}(1.1)^0}{0!} = 0.33$

② $Pr(X=1) = \frac{e^{-1.1}(1.1)^1}{1!} = 0.37$

③ $Pr(X \geq 2) = 1 - Pr(X < 2)$

$= 1 - \left[\frac{e^{-1.1}(1.1)^0}{0!} + \frac{e^{-1.1}(1.1)^1}{1!} \right]$

$= 0.30$

⑤ التوزيع الهندسي Geometric distribution

يعد هذا التوزيع جزء من التوزيع الاحتمالي المتعلق بتجارب برنولي ، فهو يمثل عدد التكرارات للتجربة للحصول على اول نجاح فقط في التجارب. **مثلاً** . تجربة القاء قطعة النقود فربما تكون X عدد مرات القاء قطعة النقود حتى الحصول على اول صورة ...

تعريف : يقال ان X متغير عشوائي يتوزع التوزيع الهندسي وان دالة الكتلة الاحتمالية له تكون بالشكل الآتي :

$$f(x) = \begin{cases} p\,q^{x} & x = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

اذ ان :

p : تمثل معلمة التوزيع ، $0 < p < 1$ ، $q = 1 - p$

وبالامكان وصف المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الهندسي وبالشكل الآتي :

$$X \sim Geo(p)$$

وان مجموع دالة الكتلة الاحتمالية يساوي واحد ،

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = p \sum_{x=0}^{\infty} q^{x} = p\left[1 + q + q^{2} + \cdots\right]$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} = 1$$

الخصائص الرياضية للتوزيع :-

اذا كان $X \sim Geo(P)$ فإن :

$$E(X) = \frac{q}{p} \quad , \quad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad , \quad M_X(t) = \frac{p}{1-qe^t}$$

البرهان :-

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p q^x$$

$$= p \sum_{x=0}^{\infty} x \, q^x$$

$$= p \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot q^{x-1} \cdot q$$

$$= pq \sum_{x=0}^{\infty} \underbrace{x \, q^{x-1}}_{\frac{\partial}{\partial q} q^x}$$

$$= pq \frac{\partial}{\partial q} \sum_{x=0}^{\infty} q^x \Rightarrow pq \cdot \frac{\partial}{\partial q} [1 + q + q^2 + \cdots]$$

$$\Rightarrow pq \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow pq \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

وبالإمكان كتابة المقدار $E(X^2)$ بالصيغة أدناه لنتمكن من إيجاد تباين المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الهندسي :-

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$$

$$E(X(X-1)) = p \sum_{X=0}^{\infty} X(X-1) q^X$$

$$\because \frac{\partial^2}{\partial q^2} q^X = \frac{\partial}{\partial q} X q^{X-1} = X(X-1) q^{X-2}$$

$$\Rightarrow p \sum_{X=0}^{\infty} X(X-1) q^{X-2} q^2$$

$$\Rightarrow p q^2 \sum_{X=0}^{\infty} \underbrace{X(X-1) q^{X-2}}_{\frac{\partial^2}{\partial q^2} q^X}$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{X=0}^{\infty} q^X$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} [1 + q + q^2 + \cdots]$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \cdot \frac{1}{(1-q)}$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\Rightarrow p q^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} \Rightarrow \frac{2q^2}{p^2}$$

$$\therefore E(x^2) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

$$\therefore V(X) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q^2}{p^2}[2-1] + \frac{q}{p}$$

$$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{pq^2 + p^2q}{p^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{p}(q^2 + pq)}{p^{\cancel{3}\,2}} = \frac{q(\overbrace{p+q}^{1})}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$M_x(t) = E e^{tX}$$

$$= \sum_{X=0}^{\infty} e^{tX} p q^X$$

$$\Rightarrow p \sum_{X=0}^{\infty} (e^t q)^X$$

$$\Rightarrow p[1 + e^t q + (e^t q)^2 + \cdots]$$

$$\Rightarrow p \cdot \frac{1}{1-e^t q} = \frac{p}{1-qe^t}$$

(١٤٦)

$$F(x) = \sum_{t=0}^{x} f(t) = Pr(X \le x)$$

$$= p \sum_{t=0}^{x} q^{t} \Rightarrow p\,[\,\underbrace{1 + q + q^{2} + \cdots + q^{x}}_{\text{متوالية هندسية منتهية}}\,]$$

$$\Rightarrow p \cdot \frac{1 - q^{x+1}}{1 - q}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} \cdot 1 - q^{x+1} = F(x)$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \\ 1 - q^{x+1} & 0 \le x < \infty \\ 1 & x = \infty \end{cases}$$

ملاحظة:- هنالك شكل اخر لدالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع الهندسي وهي كالآتي:-

$$f(x) = \begin{cases} p\,q^{x-1} & x = 1, 2, \cdots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مثال:- اذا كان $X \sim Geo(\frac{1}{3})$ ، اوجد احتمال

① $P(X \le 3)$

② $P(X > 2)$

① $Pr(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + Pr(X=3)$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

② $Pr(X > 2) = 1 - Pr(X \le 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$$= 1 - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]$$

(١٤٧)

التوزيعات الاحتمالية المستمرة
Continous Probability distribution

① التوزيع المنتظم المستمر (continous uniform distribution)

يقال بأن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم المستمر اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f.) لهذا المتغير معرفة بالشكل الآتي :-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

اذ ان :-
a, b : تمثل معلمات التوزيع وتكون اعداد حقيقية

وبالامكان وصف المتغير العشوائي X الذي يتوزع التوزيع المنتظم المستمر بالشكل الآتي :-

$$X \sim U(a, b)$$

وان تكامل دالة الكثافة الاحتمالية لـ X يساوي الواحد الصحيح وكالآتي :-

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{1}{b-a}\, x \Big|_a^b$$

$$= \frac{\cancel{b-a}}{\cancel{b-a}} = 1$$

* الخصائص الرياضية للتوزيع المنتظم المستمر :-

اذا كان $X \sim U(a,b)$ فإن :-

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad , \quad M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \; , t \neq 0$$

$$F(X) = \frac{X-a}{b-a}$$

البرهان

القيمة المتوقعة

$$E(X) = \int_a^b X \cdot f(X)\, dX$$

$$\Rightarrow \int_a^b X \cdot \frac{1}{b-a}\, dX \Rightarrow \frac{1}{2(b-a)} \cdot \frac{X^2}{2} \Big|_a^b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(b-a)} [b^2 - a^2] \Rightarrow \frac{1}{2\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)}(b+a) = \frac{a+b}{2}$$

التوقع الرياضي

الثاني

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \int_a^b X^2\, dX \Rightarrow \frac{1}{3(b-a)} X^3 \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{(a^2+b^2+ab)\cancel{(b-a)}}{3\cancel{(b-a)}}$$

$$\therefore V(X) = \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{4a^2+4b^2+4ab-3a^2-3b^2-6ab}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{12} \Rightarrow \frac{(b-a)^2}{12}$$ التباين

الدالة المولدة للعزوم

$$M_x(t) = E\,e^{tx}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\,dx = \frac{1}{t(b-a)}e^{tx}\Big|_a^b$$

$$= \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)} \quad \text{m.g.f of } (x)$$

س١١/ ايجاد التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X باستعمال الدالة المولدة للعزوم اعلاه.

الدالة التراكمية

$$F(x) = Pr(X \le x) = \int_{t=a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-a}\cdot t\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{c.d.f of } (x).$$

مثال:- اذا كان $X \sim U(3,9)$ اوجد ① μ_X

② $\sigma^2_{(X)}$

③ $M_X(t)$

④ $P(X<5)$

(الحل)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 3<X<9 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

① $E(X) = \mu_X = \frac{a+b}{2} = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

② $\sigma^2_X = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(9-3)^2}{12} = \frac{6^2}{12} = \frac{36}{12} = 3 > 0$

③ $M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} = \frac{e^{9t} - e^{3t}}{6t}$

④ $Pr(X<5) = \int_3^5 \frac{1}{6}\, dx = \frac{1}{6} \cdot X \Big|_3^5$

$= \frac{1}{6}[5-3] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

تمرين:- اذا كان $X \sim U(-a, a)$ اوجد قيمة الثابت (a)
بحيث ان $Pr(X>1) = \frac{1}{3}$

③ التوزيع الأسي (Exponential Distribution)

يقال بأن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الاسي اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f.) لهذا المتغير معرفة بالشكل الآتي :-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & 0 < x < \infty \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

إذ ان :-

λ : تمثل معلمة التوزيع وتكون $\lambda > 0$

هنالك علاقة بين التوزيع الاسي وتوزيع بواسون ، فمثلاً اذا كانت وقوع احداث ما يتبع توزيع بواسون فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الاسي .

وبالامكان وصف المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الاسي بالشكل ادناه :-

$$X \sim \exp(\lambda)$$

* دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي فتحققه الشروط اي ان :-

(i) $f(x) > 0$ ، (ii) $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx$$

$$\Rightarrow -e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^\infty = -\left[e^{-\infty} - e^{0}\right]$$

$$= 1$$

* الخصائص الرياضية للتوزيع الاسي

اذا كان $X \sim exp(\lambda)$ فإن

$$E(X) = \lambda \quad , V(X) = \lambda^2 \quad , M_X(t) = (1-\lambda t)^{-1}$$

$$F(X) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

البرهان

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot f(x)\, dx$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}\, dx$$ تكامل بالتجزئة

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \qquad v = -e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$uv - \int v\, du$$

$$\underbrace{-x \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^\infty}_{Zero} + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\lambda}}\, dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\frac{1}{\lambda}} e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^\infty = -\lambda \left[e^{-\infty} - e^{0} \right]$$

$$= \lambda = E(X)$$

$V(X)$: H.W.

واجب

$$M_X(t) = E e^{tX}$$

الدالة المولدة للعزوم

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{\lambda} - t\right)} \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} * -\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda} - t\right)} e^{-x\left(\frac{1}{\lambda} - t\right)} \Big|_0^\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} * \frac{1}{\left(\frac{1-\lambda t}{\lambda}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{1-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-\lambda t}\right) \Rightarrow (1-\lambda t)^{-1} \text{ m.g.f. of } X$$

$$F(x) = Pr(X \leq x)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} \, dt$$

$$\Rightarrow \; -e^{-\frac{t}{\lambda}} \Big|_0^x = -\left[e^{-\frac{x}{\lambda}} - e^{0} \right]$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} \qquad \text{c.d.f of } X.$$

مثال:- اذا كان $X \sim \exp(3)$ ، اوجد احتمالية $Pr(X \leq 2)$ ، $Pr(1 < X < 3)$

① $$Pr(X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \, dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{3}} \Big|_0^2 \Rightarrow -\left[e^{-\frac{2}{3}} - e^{-0} \right] = 1 - e^{-\frac{2}{3}}$$

② $$Pr(1 < X < 3) = \int_1^3 \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \, dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{3}} \Big|_1^3 = -\left[e^{-1} - e^{-\frac{1}{3}} \right] = \boxed{e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1}}$$

or $F(3) - F(1)$ $$\Rightarrow (1 - e^{-\frac{3}{3}}) - (1 - e^{-\frac{1}{3}})$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - e^{-1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{3}} = \boxed{e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1}}$$

٢ التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)

يعتبر التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات الاحتمالية للنظرية الاحصائية وتطبيقاتها بسبب اغلب الظواهر الطبيعية تتبع التوزيع الطبيعي، فاستخدامات هذا التوزيع تدخل في العديد من المجالات كالزراعة والصناعة والطب و ....

ويدعى هذا التوزيع بـ التوزيع الجرسي او توزيع Gaussian .

تعريف :- يقال ان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير كالآتي :-

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty<X<\infty \\ & -\infty<\mu<\infty \\ & \sigma^2>0 \\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

اذا ان :-

μ, σ^2 : يمثلان معلمات التوزيع الطبيعي

بالامكان وصف المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي بالشكل الآتي :-

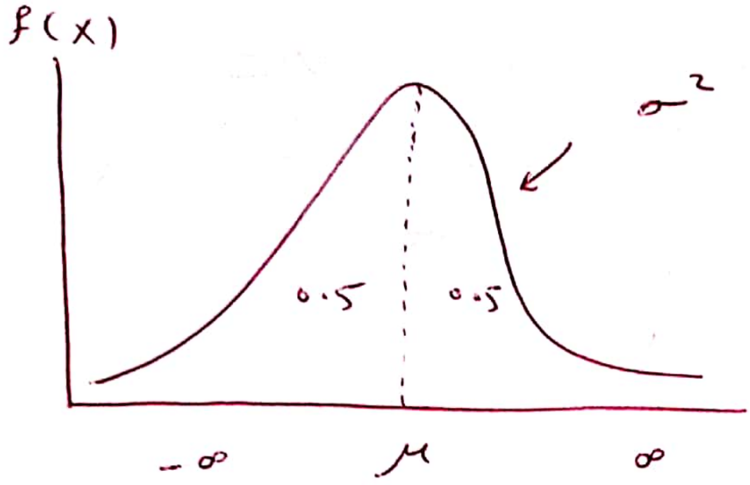
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

إذ ان :-

μ : تمثل التوقع الرياضي لـ X اي $E(X)$.

σ^2 : تمثل تباين المتغير العشوائي X اي $V(X)$.

والشكل الاتي يوضح مخطط الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع.



نلاحظ من الشكل اعلاه يكون الرسم على شكل جرس ومن هنا جاءت تسمية التوزيع الطبيعي بالتوزيع الجرسي.

ملاحظة ① يعتبر التوزيع الطبيعي من التوزيعات المتماثلة (symmetric) اي ان الطرف الايمن يكون مساويا للطرف الايسر.

② بما ان التوزيع الطبيعي متماثل فإن:-

الوسط (mean) = الوسيط (median) = المنوال (Mode)

$= \mu$

③ دالة كاما (Gamma function)

$$\Gamma n = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = (n-1)! \quad , \quad \Gamma n+1 = n\,\Gamma n$$

$$\Gamma \tfrac{1}{2} = \sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma \tfrac{3}{2} = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+1\right) = \tfrac{1}{2}\,\Gamma\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

حفظ

مبرهنة:- اذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx$$

let $y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + \mu$

$dx = \sigma\,dy$

$\because x \to -\infty, \ y \to -\infty$

$x \to \infty, \ y \to \infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \cancel{\sigma}\,dy$$

let $w = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 2w \Rightarrow y = \sqrt{2w}$

$dy = \sqrt{2} * \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}}\,dw$

$dy = \frac{1}{\sqrt{2w}}\,dw$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w} \cdot \frac{dw}{\sqrt{2w}}$$

بما ان التوزيع الطبيعي متماثل اي ان الطرف الايمن مساوياً للطرف الايسر بالامكان اما ده كتابة التكامل اعلاه بالصيغة الاتية:-

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \cancel{2}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-w} \cdot \frac{dw}{\sqrt{2w}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} w^{-\frac{1}{2}}\, e^{-w}\, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_{0}^{\infty} w^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-w}\, dw}_{\text{عبارة عن دالة كاما ل } (\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\tfrac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\cdot\cancel{\sqrt{\pi}} = 1$$

* الخصائص الرياضية للتوزيع الطبيعي :-

اذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن :-

$E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

البرهان

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

let $Y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $x = \sigma y + \mu$

$dx = \sigma\, dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y+\mu)\cdot \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \cancel{\sigma}\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma y}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy}_{=1}$$

بالرجوع الى برهنه $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot -e^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\text{Zero}} + \mu$$

$$\therefore E(X) = \mu$$ القيمة المتوقعة لـ X

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y+\mu)^2 \cdot \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \cancel{\sigma}\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 y^2 + 2\mu\sigma y + \mu^2)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy}_{\text{Zero}}$$

$$+ \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy}_{(17)}$$

$= 1$ من المرحلة السابقة

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \mu^2$$

let $w = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 2w \Rightarrow y = \sqrt{2w}$, $dy = \frac{dw}{\sqrt{2w}}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{2}\underset{w^{\frac{1}{2}}}{\cancel{w}} e^{-w} \cdot \frac{dw}{\cancel{\sqrt{2w}}} + \mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^{\frac{3}{2}-1} e^{-w} dw + \mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \underbrace{w^{\frac{3}{2}-1} e^{-w} dw}_{\text{دالة كاما}} + \mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\tfrac{3}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{2}\sigma^2}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\Gamma\tfrac{1}{2}} = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\therefore E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$\therefore V(X) = \sigma^2 + \cancel{\mu^2} - \cancel{\mu^2} = \sigma^2$ قيمة التباين للمتغير X.

$M_X(t) = E e^{tX}$ الدالة المولدة للعزوم

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

let $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $x = \sigma y + \mu$, $dx = \sigma dy$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma y + \mu)} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} \cancel{\sigma} dy$$

$$\Rightarrow \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma y} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 + t\sigma y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2t\sigma y + t^2\sigma^2 - t^2\sigma^2)} dy$$

$$\Rightarrow \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - t\sigma)^2} e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - t\sigma)^2} dy$$

$$\Rightarrow e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - t\sigma)^2} dy}_{=1}$$

$\therefore M_x(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \Rightarrow$ m.g.f of x

(17C)

④ التوزيع الطبيعي القياسي Standard Normal distribution

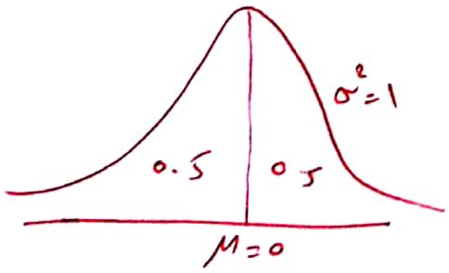
اذا كان المتغير العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن ،

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \text{(standard normal distribution)}$$

إي ان يقال للمتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط μ مقداره صفر ($\mu=0$) وتباين σ^2 مقداره واحد ($\sigma^2=1$) وان دالة الكثافة الاحتمالية له تكون بالشكل الآتي:-

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} & -\infty < z < \infty \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

وان منحنى شكل التوزيع الطبيعي القياسي هو بالضبط مشابه للتوزيع الطبيعي



تحويل التوزيع الطبيعي الى التوزيع الطبيعي القياسي

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإنه بالامكان تحويله الى التوزيع الطبيعي القياسي بوسط $\mu=0$ وتباين $\sigma^2=1$ وذلك من خلال العلاقة الآتية:-

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$E(z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\cdot E(X-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left(E(X) - \mu\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

$$V(z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\cancel{\sigma^2}}{\cancel{\sigma^2}} = 1$$

$$M_z(t) = E\, e^{tz} = E\left(e^{t\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow E\left(e^{\frac{tX}{\sigma}} \cdot e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}\, E\left(e^{\frac{tX}{\sigma}}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} \cdot M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} \cdot \left[e^{\mu \frac{t}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\cancel{\sigma^2}}\cdot \cancel{\sigma^2}}\right]$$

$$\Rightarrow e^{-\cancel{\frac{t\mu}{\sigma}} + \cancel{\frac{\mu t}{\sigma}} + \frac{1}{2}t^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي القياسي

مثال ١- اذا كانت $X \sim N(20, (3.33)^2)$ اوجد $Pr(X \geq 21.11)$

$$Pr(X \geq 21.11) = Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{21.11-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= Pr\left(Z \geq \frac{21.11-20}{3.33}\right) = 1 - Pr(Z \leq 0.33)$$

تم ايجاده من خلال
جداول التوزيع الطبيعي
اي بالاعتماد على الدالة التراكمية

$$\Rightarrow 1 - 0.629 = 0.371$$

⑤ توزيع كاما Gamma distribution

تعريف :- يقال إن المتغير العشوائي X يتبع توزيع كاما إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له كالآتي :-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} & x > 0 \\ & \alpha, \beta > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

إذ إن (α, β) تمثل معلمات توزيع كاما.

وبالإمكان وصف المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع كاما بالشكل الآتي :-

$X \sim G(\alpha, \beta)$

إذ ان :-

$$\Gamma\alpha = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx = (\alpha-1)!$$

الخصائص الرياضية للتوزيع

اذا كان $X \sim G(\alpha, \beta)$ فإن :-

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad , \quad var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad , \quad M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1+1} e^{-x\beta} \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha}} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{\alpha+1-1} \cdot e^{-x\beta}\, dx}$$

تمثل نواة توزيع كاما بالمعلمات $(\alpha+1, \beta)$

وعليه فإن نتيجة التكامل عبارة عن مقلوب الثابت

$$\Rightarrow \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha}} \cdot \frac{\Gamma_{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}} \Rightarrow \frac{\cancel{\beta^{\alpha}}}{\Gamma_{\alpha}} \cdot \frac{\Gamma_{\alpha+1}}{\cancel{\beta^{\alpha}}\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha \cancel{\Gamma_{\alpha}}}{\cancel{\Gamma_{\alpha}}\, \beta} = \frac{\alpha}{\beta} = E(x).$$

القيمة المتوقعة

$$v(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x\beta}\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha}} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{\alpha+2-1} e^{-x\beta}\, dx}$$

تمثل نواة توزيع كاما بالمعلمات $(\alpha+2, \beta)$

وعليه فإن نتيجة التكامل عبارة عن مقلوب الثابت

$$\Rightarrow \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma_{\alpha}} \cdot \frac{\Gamma_{\alpha+2}}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\cancel{\beta^{\alpha}}}{\cancel{\Gamma_{\alpha}}} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cancel{\Gamma_{\alpha}}}{\cancel{\beta^{\alpha}}\beta^2}$$

$$\therefore v(x) = \frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\cancel{\alpha^2}+\alpha-\cancel{\alpha^2}}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$= v(x)$

التباين

$$M_X(t) = E\, e^{tX}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \underbrace{\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx}$$

يمثل نواة توزيع كاما بالمعلمات $(\alpha, \beta - t)$

وعليه فإن التكامل عبارة عن مقلوب الثابت

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\cancel{\Gamma\alpha}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma\alpha}}{(\beta-t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha = M.g.f. \text{ of } X \sim G(\alpha, \beta)$$

---

⑦ توزيع بيتا Beta distribution

تعريف: يقال إن المتغير العشوائي X يتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma\alpha\, \Gamma\beta} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ & \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

إذ إن (α, β) تمثل معلمات التوزيع.

وبالإمكان وصف المتغير العشوائي X بالشكل أدناه

$$X \sim B(\alpha, \beta)$$

الخصائص الرياضية للتوزيع

اذا كان $X \sim B(\alpha, \beta)$ فإن :-

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad , \quad V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)^2 (\alpha+\beta)^2}$$

$$E(X) = \int_0^1 X \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \, x^{\alpha-1} (1-X)^{\beta-1} \, dX$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \underbrace{\int_0^1 x^{\alpha+1-1} (1-x)^{\beta-1} \, dx}$$

نواة توزيع بيتا بالمعلمات $(\alpha+1, \beta)$

وعليه فإن نتيجة التكامل عبارة عن مقلوب الثابت

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \Rightarrow \frac{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\,\cancel{\Gamma(\beta)}} \cdot \frac{\alpha\,\cancel{\Gamma(\alpha)}\,\cancel{\Gamma(\beta)}}{(\alpha+\beta)\,\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = E(x)$$ القيمة المتوقعة لـ X

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \, x^{\alpha-1} (1-X)^{\beta-1} \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \underbrace{\int_0^1 x^{\alpha+2-1} (1-x)^{\beta-1}\, dx}_{\text{نواة توزيع بيتا بالمعلمات } (\alpha+2,\ \beta)}$$

$\Rightarrow$ وعليه فإن نتيجة التكامل عبارة عن مقلوب الثابت

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\,\cancel{\Gamma(\beta)}} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\,\cancel{\Gamma(\alpha)}\,\cancel{\Gamma(\beta)}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\,\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} = E(X^2)$$

$$\therefore V(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\alpha) - \alpha^2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha^2+\alpha) - \alpha^2(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\alpha\beta+\beta^2+\beta)}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\alpha^4} + \cancel{\alpha^3} + \cancel{2\alpha^3\beta} + 2\alpha^2\beta + \cancel{\alpha^2\beta^2} + \alpha\beta^2 - \cancel{\alpha^4} - \cancel{\alpha^3\beta} - \cancel{\alpha^3} - \cancel{\alpha^3\beta} - \cancel{\alpha^2\beta^2} - \alpha^2\beta}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)} = \frac{\cancel{(\alpha+\beta)}\,\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^{\cancel{3}\,2}(\alpha+\beta+1)}$$

$$\therefore V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

∴ التباين لـ $X \sim B(\alpha, \beta)$ توزيع بيتا.