Combination التوافيق (التراكيب)

تعرف بانها عدد الطرق التي يتم فيها اختيار مجموعة جزئية من مجموعة كلية بغض النظر عن الترتيب (الترتيب غير مهم). والتكرار مسموح وتعتبر مبدأ من مبادئ العد.

رياضياً تحسب التوافيق وفقاً للعلاقة الآتية:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}, \quad r \leq n$$

اذ ان:

n :- عدد افراد المجموعة.
r :- كيفية اخذ افراد المجموعة.

r, n كلاهما اعداد طبيعية.

مثال ١: نفرض لدينا صندوق يحتوي على اربع كرات ملونه حمراء، سوداء، صفراء، زرقاء ونريد سحب كرتين معاً من الصندوق معاً ماهي الحالات الممكنه؟

$n = 4$ (عدد الكرات)

$r = 2$ (سحب كرتين)

والترتيب غير مهم

$$C_r^n = C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3\cdot \cancel{2\cdot 1}}{\cancel{2\cdot 1}\;\cancel{2\cdot 1}} = 6$$

عدد الحالات الممكنه هي : (حمراء ، سوداء)

(حمراء ، صفراء)

(حمراء ، زرقاء)

(سوداء ، صفراء)

(سوداء ، زرقاء)

(صفراء ، زرقاء)

(حيث هنا لايوجد اهمية للترتيب كون الكرتين يسحبان معاً)

مثال ٢ :- ماهي عدد الطرق الممكنة لاختيار ٣ اشخاص من اجل ١٠ اشخاص لشغل ٣ وظائف بحيث ان الشخص يمكن ان يشغل اكثر من وظيفة .

$n = 10$, $r = 3$ (الترتيب غير مهم)

$$C^{10}_{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \;\; \cancel{7!}}$$

$= (120)$ طريقة

ملاحظة :-

$$C^{n}_{r} = C^{n}_{n-r}$$

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,(\cancel{n}-\cancel{n}+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال ٣ :- اذا كان لدينا $C_2^n = 3$ ماهي قيمة الـ n .

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 3 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2.1\,\cancel{(n-2)!}} = 3$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 6 \Rightarrow n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0$$

إما

$n = 3$

او

$n = -2$ (تهمل لانها بالسالب)
كون الـ n عدد صحيح موجب

وللتحقق من ذلك

$$C_2^3 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,1!} = \underline{\underline{3}}$$

واجب ① :- ما عدد الاعداد التي رمز كل منها مكون من اربع مراتب مأخوذة من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

بحيث ⓐ التكرار مسموح في مراتب العدد .

ⓑ التكرار غير مسموح في مراتب العدد .

② برهن ان :-

$$\boxed{\frac{C_r^n}{C_{r-1}^n} = \frac{(n-r+1)}{r}}$$

Probability Basics اساسيات الاحتمالية

الاحتمالية:- هي عبارة عن مقياس لعدم مؤكدية وقوع حدث ما ، يُقاس الاحتمال بأنه رقم بين الصفر والواحد

$0 \leq P \leq 1$

يشير الصفر الى الاستحالة و الواحد يشير الى التأكيد كلما زاد احتمال الحدث . زادت امكانيه وقوعه

مثال على ذلك: رمي العمله المعدنية (صورة ، كتابة)

التجربة العشوائية:- هي التجربه التي لايمكن معرفة نتيجتها قبل اجرائها ولكن تعرف بشكل مسبق جميع النتائج الممكنة. **مثال**: رمي العمله المعدنية تعرف قبل اجراء الرمي فان النتيجه إما صورة او كتابة.

فضاء العينة (الحالة): sample (state) space

هو كل (جميع) النتائج الممكنة في التجربة.

ويرمز لها بالرمز S

مثال: بالرجوع الى العملة المعدنية فإن فضاء الحالة هي :-

$S = \{ H , T \}$ ، H : صورة

T : كتابة

الحدث (Event) :- هي عنصر او عدة عناصر في فضاء العينة (الحالة) أو مجموعة جزئية من فضاء العينة

مثال :- رمي حجر النرد فإن فضاء العينة (الحالة) هي

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وإن الحدث يكون على سبيل المثال :-

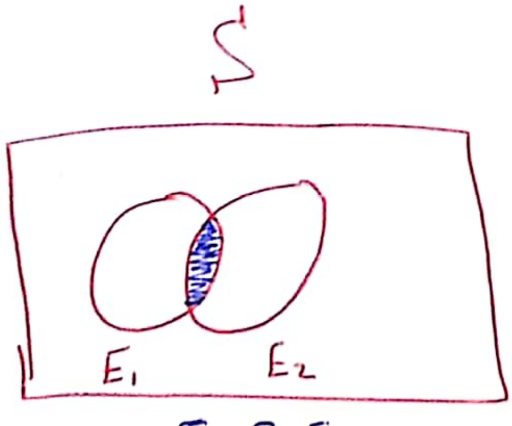
الحدث

$A = \{\underbrace{1, 4, 5}_{\text{او عدة عناصر}}\}$ or $A = \{\underbrace{5}_{\text{عنصر}}\}$

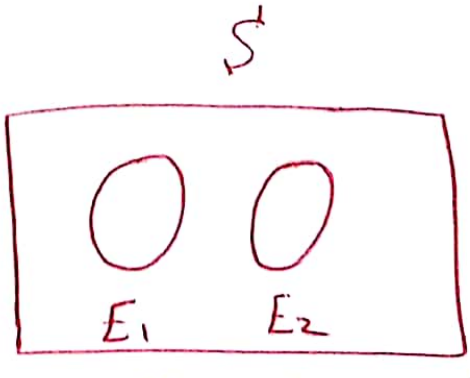
انواع الحوادث :-

① الحوادث المتنافية :- Mutually Exclusive وهي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد لان وقوع احدها يمنع وقوع الحوادث الاخرى

مثال :- يقال ان الحادثتين (E_1 , E_2) بأنهما حادثتين متنافيتين اذا استحال حدوثهما معاً.



$E_1 \cap E_2$



$E_1 \cap E_2 = \phi$ ← تعني مجموعة خالية

$E_1 \cap E_2 = \phi$:. وعليه يمكن القول بان الحادثين E_1 , E_2 حادثتين متنافيتين .

٢- الحوادث المستقلة :- يقال بان الحادثين (E_1 , E_2) بانهما مستقلتان اذا كان حدوث احدهما لا يعتمد على حدوث الاخر .

٣- الحوادث غير المستقلة (المعتمدة) :-
يقال بان الحادثين (E_1 , E_2) بانهما معتمدتان اذا كان حدوث احدهما يعتمد على حدوث الاخر .

ملاحظة :- • الحدث الذي يتكون من عنصر واحد يسمى بالحدث البسيط .

$E_1 = \{5\}$, E_1 : حدث بسيط

• الحدث الذي يتكون من عنصرين او اكثر يسمى بالحدث المركب .

$E_2 = \{3 , 4 , 8\}$, E_2 : حدث مركب

* قوانين الاحتمالية :-

احتماليه اي حدث بصورة عامة هي :-

$$P(E) = \frac{n}{N} = \frac{n(E)}{S} = \frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث } E}{\text{فضاء الحالة الكلي}}$$

الجزء ← n ، الكل ← N

$P \Rightarrow$ الاحتمال (Probability)

$E \Rightarrow$ الحدث (Event)

$S \Rightarrow$ فضاء الحالة (الكلية) (sample (state) space)

وبصورة عامة فإن :

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

مثال ١- رميت قطعة نقود معدنية مرة واحدة ① احسب احتمال ان يكون الوجه الظاهر كتابة (T).

فضاء الحالة

$$S = \{ \underbrace{H}_{\text{صورة}} , \underbrace{T}_{\text{كتابة}} \}$$

$$P(T) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه كتابة}}{\text{فضاء الحالة}} = \frac{n}{N} = \frac{1}{2}$$

② احتمال ان يكون الوجه الظاهر صورة (H)

طريقة اولى

$$P(H) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه صورة}}{\text{فضاء الحالة}} = \frac{n}{N} = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية

بما ان مجموع احتمال الحوادث يساوي واحد فإن :

$$P(T) + P(H) = 1 \Rightarrow P(H) = 1 - P(T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ٣:- رُميت قطعة نقود معدنية مرتين. احسب احتمال

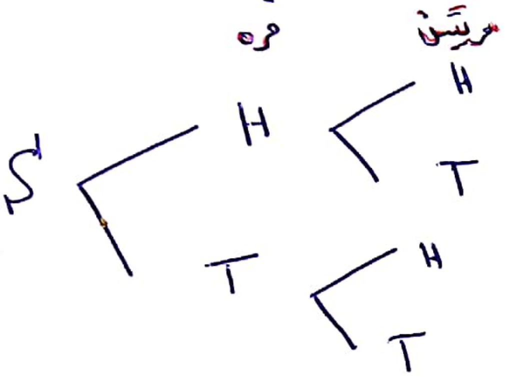
١- ان يكون الوجه الظاهر صورة.

٢- ان يحتوي على كتابة.

٣- ان يحتوي على صورتين.

الحل

لتمثيل فضاء الحالة (العينة) نستخدم مخطط الشجرة (Tree Diagrams)



$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

نفرض ان

E_1 : يمثل حدث ان يكون الوجه الظاهر صورة H.

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه صورة } H}{S} = \frac{1}{4}$$

E_2 : يمثل حدث انه يحتوي على كتابه T.

$$P(E_2) = \frac{2}{4}$$

E_3 : يمثل حدث ان يحتوي على صورتين.

$$P(E_3) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{3} P(E_i) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

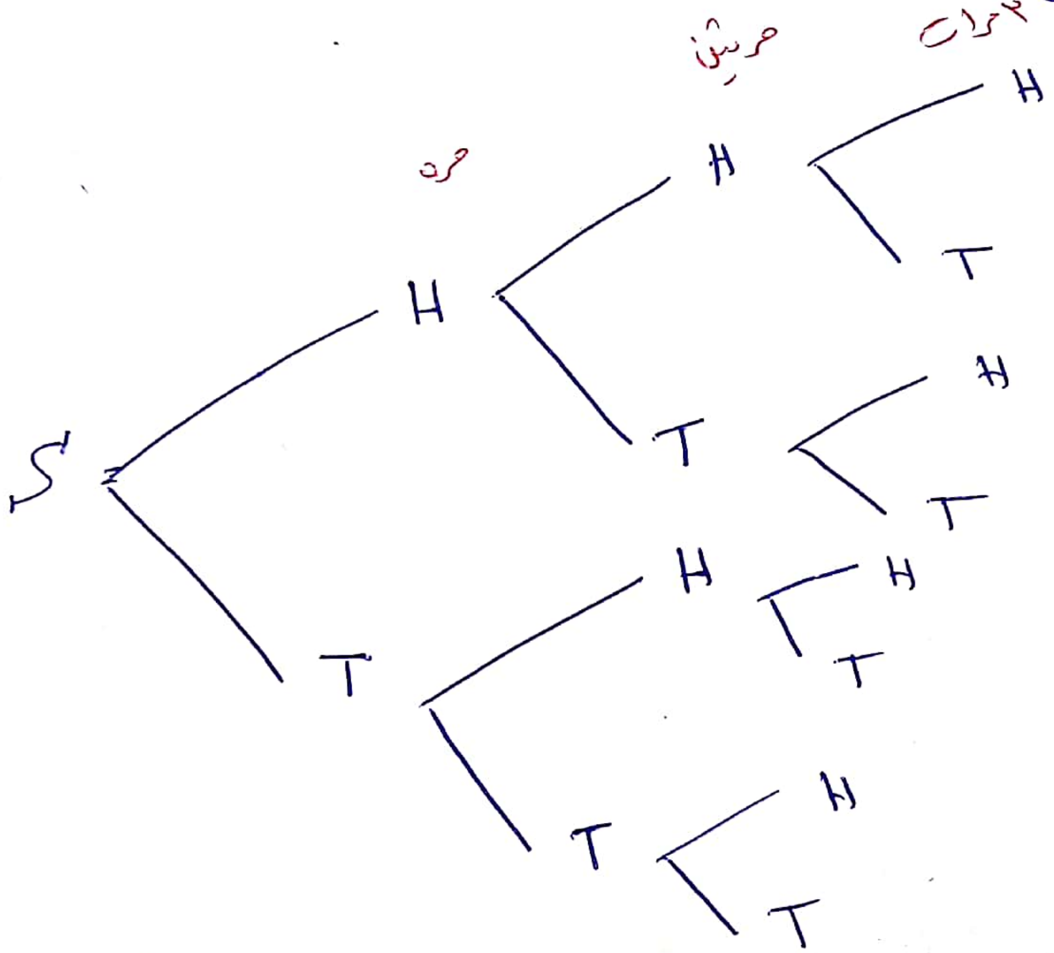
مثال ٣: رميت قطعة نقود ثلاث مرات. احسب احتمال

١ - ان يكون الوجه الظاهر كتابة. E_1

٢ - ان يحتوي على الاقل صورتين. E_2

٣ - ان يحتوي على صورة واحدة. E_3

الحل: لتمثيل فضاء الحالة (العينة) تستخدم مخطط الشجرة.



$$S' = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه كتابه}}{S} = \frac{E_1=\{T,T,T\}}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(E_2) = \frac{4}{8} \Rightarrow E_2 = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\}$$

$$P(E_3) = \frac{3}{8} \Rightarrow E_3 = \{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$$

$$\sum_{i=1}^{3} P(E_i) = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

مثال ٤ :- رمي زهر النرد مرة واحدة. احسب احتمال :

١- ان يكون الرقم الظاهر عبارة عن العدد 2 . E_1

٢- " " عبارة عن ارقام فردية . E_2

٣- " " رقم زوجي واقل من 6 . E_3

الحل

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد مرات ظهور العدد 2}}{S} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الارقام فردية}}{S} = \frac{3}{6} \Rightarrow E_2 = \{1, 3, 5\}$$

$$P(E_3) = \frac{\text{عدد مرات الارقام الزوجية الاقل من 6}}{S} = \frac{2}{6} \Rightarrow E_3 = \{2, 4\}$$

واجب بيتي :- (١) رمي زهر النرد مرتين احسب احتمال ان يكون مجموع الرقمين يساوي عدد فردي .

(٢) اذا كان فضاء الحالة $S = \{0, 1, 2, 3\}$ وان

$P(0) = \frac{1}{2}$, $P(1) = \frac{1}{4}$, $P(2) = \frac{1}{8}$

نفرض ان $E = \{2, 3\}$, $F = \{0, 3\}$ جد

$P(E)$, $P(E \cap F)$

* بديهيات الاحتمالات

1- $P(\phi) = 0$

لكل حدث

2- For every event A, $0 \leq P(A) \leq 1$ لايمكن ان تكون سالبه

3- $P(S) = 1$

4- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

إذا ان A, B حادثتان

اذا كانت حوادث متنافية

5- if A and B are mutually exclusive events, then: فان

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(\phi)$$
$$= P(A) + P(B) - 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

اذا كانت حوادث مستقلة فان

6- if A and B are independent events, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - [P(A) \cdot P(B)]$$

اذا كانت
7. if A and B are dependend events, then;
حوادث معتمده

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(A)$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$P(A|B)\cdot P(B) \qquad\qquad P(A|B)\cdot P(A)$$

اذا كانت
8. if $A_1, A_2, A_3, ---$ are sequence of mutually exclusive events, then:
سلسلة من / الحوادث المتنافية تماما

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3 \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

$$- \underbrace{P(A_1\cap A_2)}_{zero} - \underbrace{P(A_1\cap A_3)}_{zero} - \cdots$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

9. for لاي every حدث event $A \subset S$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{or} \quad P(A') = 1 - P(A)$$

complement law (قانون المبدل (المكمل))

$$A \cup A^c = S$$

$$P(A) + P(A^c) = P(S)$$

$\because P(S) = 1$

$$P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

10.

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c)$$

$$P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B)$$

Conditional probability الاحتمالية الشرطية

اذا كانت A, B حادثتين معرفتين في فضاء العينة S فان احتمالية حدوث الحادثة A بشرط ان الحادثة B قد حدثت فعلاً (تسمى الاحتمالية الشرطية لحدوث الحادثة A معطى ان الحادثة B قد حدثت) وتحسب كالاتي

$A \mid B$

معطى دائماً (معلوم)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , P(B) \neq 0$$

دائماً نقسم على المعلوم (اي مابعد |)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , P(A) \neq 0$$

خصائص الاحتمالية الشرطية:

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$ or $P(B|A)$

2. $P(S|B) = 1$

حوادث متنافية

3. if A and B are Mutually exclusive events

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\phi)}{P(B)} = 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\phi)}{P(A)} = 0$$

حوادث مستقلة

4. if A and B are independent events

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)} \cdot P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$$

5. $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$

البرهان

نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^c\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A\cap B) + P(A^c\cap B)}{P(B)}$$

حوادث مستقلة ... فإن

since A and B are independent events, Then

$$\frac{P(A)\cdot P(B) + P(A^c)\cdot P(B)}{P(B)}$$

فإن

$\because P(A^c) = 1 - P(A)$, then

$$\frac{P(A)\cdot P(B) + [1-P(A)]\cdot P(B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{P(A)\cdot P(B)} + \cancel{P(B)} - \cancel{P(A)\cdot P(B)}}{\cancel{P(B)}} = 1$$

نظرية :-

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

البرهان

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B))}{P(B)}$$

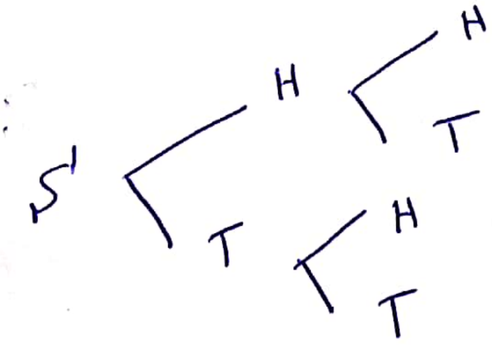
$$\Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B) \cup P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

مثال: رمى شخص قطعة نقود مرتين، فإذا علمت انه الشخص قد حصل على الاقل صورة واحدة، ماهو احتمال ان يكون الشخص قد حصل على صورتين



$$, S' = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

$$A = \{(H,H), (H,T), (T,H)\}$$

$$B = \{(H,H)$$

$$P(A) = P(H,H) + P(H,T) + P(T,H)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = P(H,H) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(H,H) = \frac{1}{4}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}}{\cancel{\frac{1}{4}}} = 1$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{3}{\cancel{4}}} = \frac{1}{3}$$

المطلوب الأساسي بالسؤال

* قوانين مختلفه عن المبدل (المكمل) *

- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} - \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= 1 - P(A|B)$$

- $P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B)$

- $P((A\cap B)^c) = 1 - P(A\cap B)$

مثال :- يعمل لدى احدى الشركات 60 سائق ، والجدول ادناه يبين فئات اعمار السواق وعدد المخالفات المرورية لسنة كامله ، فإذا علمنا ان A_i تمثل الفئة العمرية للسائق حيث $(i = 1, 2, 3)$ وان B تمثل المخالفه المرورية التي ارتكبها السائق i ، احسب الاحتمالات الاتية :-

① $P(A_i \cap B)$ ② $P(B)$

③ $P(A_i | B)$

B

	الأعمار \ المخالفات	مخالف	غير مخالف	المجموع	
A_1	أقل من 25 سنة	4	8	12	$\leftarrow \Sigma A_1$
A_2	أقل من 45 سنة	9	24	33	$\leftarrow \Sigma A_2$
A_3	أكبر من 45 سنة	1	14	15	$\leftarrow \Sigma A_3$

60 المجموع الكلي.

$\Sigma = 46$ غير المخالف

$\Sigma = 14$ المخالف $\uparrow$ ΣB

الحل

$$P(A_1) = \frac{12}{60} \quad , \quad P(A_2) = \frac{33}{60} \quad , \quad P(A_3) = \frac{15}{60}$$

① $P(A_i \cap B) \Rightarrow P(A_1 \cap B) = \frac{4}{60}$

$$P(A_2 \cap B) = \frac{9}{60}$$

$$P(A_3 \cap B) = \frac{1}{60}$$

② $P(B) = \frac{14}{60}$ or $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

$$\frac{4}{60} + \frac{9}{60} + \frac{1}{60} = \frac{14}{60}$$

● مطلوب اضافي

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{60} = \frac{60-14}{60} = \frac{46}{60}$$

غير المخالف

or $= \frac{\Sigma \text{غير المخالف}}{60} = \frac{46}{60}$

③ $P(A_i \mid B)$

$$\Rightarrow P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{\cancel{60}}}{\frac{14}{\cancel{60}}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{\cancel{60}}}{\frac{14}{\cancel{60}}} = \frac{9}{14}$$

$$\Rightarrow P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{\cancel{60}}}{\frac{14}{\cancel{60}}} = \frac{1}{14}$$

* مطاليب اضافية لمثال اعلاه :-

$P(A_i^c)$

$$\Rightarrow P(A_1^c) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{12}{60} = \frac{48}{60}$$

$$\Rightarrow P(A_2^c) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{33}{60} = \frac{27}{60}$$

$$\Rightarrow P(A_3^c) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{15}{60} = \frac{45}{60}$$

$P(A_i \cup B)$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) - P(A_1 \cap B)$$
$$= \frac{12}{60} + \frac{14}{60} - \frac{4}{60} = \frac{22}{60}$$

$$\Rightarrow P(A_2 \cup B) = P(A_2) + P(B) - P(A_2 \cap B)$$
$$= \frac{33}{60} + \frac{14}{60} - \frac{9}{60} = \frac{38}{60}$$

$$\Rightarrow P(A_3 \cup B) = P(A_3) + P(B) - P(A_3 \cap B)$$

$$= \frac{15}{60} + \frac{14}{60} - \frac{1}{60} = \frac{28}{60}$$

$P(A_i^c \mid B)$

$$\Rightarrow P(A_1^c \mid B) = 1 - P(A_1 \mid B)$$

$$= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow P(A_2^c \mid B) = 1 - P(A_2 \mid B)$$

$$= 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow P(A_3^c \mid B) = 1 - P(A_3 \mid B)$$

$$= 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

Bayes Theorem (نظرية بيز)

اذا كانت $A_1, A_2, ---, A_n$ حوادث معرفة في فضاء الحالة S وكانت B اي حادثة اخرى في فضاء الحالة S فإن :-

$$P(A_i|B) = \frac{\overbrace{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}^{P(A_i \cap B)}}{\underbrace{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + --- + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}_{P(B)}}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

مثال:- ثلاثة صناديق تحتوي على كرات بالشكل الآتي :

الصندوق A يحتوي على ٢ كرات حمراء و ٥ كرات بيضاء

الصندوق B يحتوي على ٢ كرات حمراء و ١ كرة بيضاء

الصندوق C يحتوي على ٢ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء

فإذا سحبت كرة عشوائية وكانت حمراء ما هو احتمال ان تكون من الصندوق A.

الحل

A	B	C
3 R	2 R	2 R
5 W	1 W	3 W

احتمال اختيار اي صندوق هو :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \mid R) = \frac{P(R \mid A) \cdot P(A)}{P(R \mid A) \cdot P(A) + P(R \mid B) \cdot P(B) + P(R \mid C) \cdot P(C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{8} \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}{\frac{3}{8} \cdot \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \underline{\underline{0.26}}$$

* مطلوب اضافي : إذا سحبت كرة عشوائية وكانت بيضاء ماهو احتمال ان تكون من الصندوق c .

$$P(C \mid W) = \frac{P(W \mid C) \cdot P(C)}{P(W \mid A) \cdot P(A) + P(W \mid B) \cdot P(B) + P(W \mid C) \cdot P(C)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \cancel{\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{0.38}}$$

③ اذا اسحبت كرة عشوائية وكانت حمراء ماهو احتمال ان تكون من الصندوق B .

$$P(B \mid R) = \frac{P(R \mid B) \cdot P(B)}{P(R \mid A) \cdot P(A) + P(R \mid B) \cdot P(B) + P(R \mid C) \cdot P(C}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \underline{0.46}$$

مثال :- صندوقين تحتوي على كرات بالشكل الاتي :-

A	B
4 black 6 white	3 b 7 w

① ماهو احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

② اذا سحبت كرة عشوائيه وكانت سوداء ، ماهو احتمال ان تكون من الصندوق B .

الحل

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

① $P(W) = P(W \cap A) + P(W \cap B)$

$$= P(W \mid A) \cdot P(A) + P(W \mid B) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2} = \underline{0.65}$$

② $$p(B|b) = \frac{p(b|B)\cdot p(B)}{\underbrace{p(b|A)\cdot p(A) + p(b|B)\cdot p(B)}_{p(b)}}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{0.15}{0.35} = \underline{0.43}$$

مطلوب اضافي :-

$p(w^c)$

$$p(w^c) = 1 - p(w) \Rightarrow 1 - 0.65 = \underline{0.35} = p(b)$$

$p(B^c|b)$

$$p(B^c|b) = 1 - p(B|b)$$

$$= 1 - 0.43 = 0.57$$

مثال: شركة احذية لها ثلاثة مصانع انتاجيه وهي كالاتي:-

① المصنع الاول ينتج 40% من انتاج الشركة وفيه 2% معيب

② المصنع الثاني ينتج 35% من انتاج الشركة وفيه 1% معيب

③ المصنع الثالث ينتج 25% من انتاج الشركة وفيه 4% معيب

فإذا اشتريت حذاء من انتاج هذه الشركة فما هو احتمال ان يكون ① معيب.

② غير معيب

③ اذا كان الحذاء معيب ما هو احتمال ان يكون قد صنع في المصنع الاول او الثاني او الثالث.

الحل

نرمز للبضاعة المعيبة بـ D

نرمز للبضاعة غير المعيبة بـ D^c أو D'

①

المصنع الاول

$P(A_1) = 0.40$

$P(A_2) = 0.35$

المصنع الثاني

$P(A_3) = 0.25$

المصنع الثالث

$P(D|A_1) = 0.02$, $P(D|A_2) = 0.01$

$P(D|A_3) = 0.04$

$\because P(D) = P(D|A_1) \cdot P(A_1) + P(D|A_2) \cdot P(A_2)$
$+ P(D|A_3) \cdot P(A_3)$

$= (0.02)(0.40) + (0.01)(0.35) + (0.04)(0.25)$

$\Rightarrow \underbrace{P(D)}_{\text{احتمالية المعيب}} = 0.0125$

② احتمالية غير المعيب

$\because P(D) + P(D^c) = 1$

$\therefore P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 0.0125$
$= 0.9785$

③ $P(A_1|D) = \dfrac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D|A_1) \cdot P(A_1)}{P(D)}$

$= \dfrac{(0.02)(0.40)}{0.0125} = 0.372$

$P(A_2|D) = \dfrac{P(D|A_2) \cdot P(A_2)}{P(D)}$

$= \dfrac{(0.01)(0.35)}{0.0125} = 0.163$