الجبر الخطي

«منظومة المعادلات الخطية»

عادة تمثل جبرياً معادلة المستقيم في المستوي x, y بمعادلة خطية بالصيغة الآتية:

$$ax+by=c \quad \ldots (1)$$

حيث ان (1) تسمى معادلة خطية بمتغيرين.

لذا بصورة عامة فان المعادلة الخطية التي لـ (n) من المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتي يعبر عنها

بالصيغة :-

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=b \quad \ldots (2)$$

حيث ان $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ ثوابت تنتمي لـ R (مجموعة الاعداد الحقيقية).

حل المعادلة الخطية:- هو متتابعة من (n) من الاعداد $s_1, s_2, \ldots, s_n$ حيث ان تلك المعادلة تتحقق عندما نعوض بـ $x_1=s_1$, $x_2=s_2$, --- $x_n=s_n$

وتسمى مجموعة كل حلول المعادلة بـ مجموعة حل.

منظومة المعادلات الخطية:- هي مجموعة من (m) من المعادلات الخطية التي لـ (n) من المتغيرات ويمكن كتابتها بالشكل الآتي:-

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots a_nx_m=b_1$$

مثال:- حل منظومة المعادلات الآتية:-

$$L_1: 5x+2y-7z=0$$
$$L_2: x-2y+z=0$$
$$L_3: 3x-4y-7z=0$$

$$\left.\begin{matrix} L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x-2y+z=0 \\ 5x+2y-7z=0 \\ 3x-4y-7z=0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} (-5L_1+L_2) \to L_2 \\ (-3L_1+L_3) \to L_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x-2y+z=0 \\ 0+12y-12z=0 \\ 0+2y-10z=0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} (L_2/12) \to L_2 \\ (L_3/2) \to L_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x-2y+z=0 \\ y-z=0 \\ y-5z=0 \end{matrix}$$

$$(L_3-L_2) \to L_3$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x-2y+z=0 \\ y-z=0 \\ 0-4z=0 \end{matrix} \Rightarrow z=0 , y=0 , x=0$$

$\therefore$ ح $=\{(0,0,0)\}$

H.W

حل منظومة المعادلات الآتية :

١

$$x - 5y + 2z = 13$$
$$3x - 14y + 3z = 29$$
$$4x - 18y + 3z = 35$$

٢

$$4x - 2y = 5$$
$$-6x + 3y = 1$$

٣

$$2x + y - 3z = 6$$
$$3x - 2y + 2z = 5$$
$$5x - 3y - z = 16$$

المصفوفة: هي ترتيب مستطيلي الشكل من عناصر حسابية (اعداد، متغيرات، دوال) تسمى عناصر المصفوفة (entries) وعادة تحاط بقوسين. ان المصفوفة (A) التي لا m من الصفوف و n من الاعمدة تكتب بالترتيب المستطيلي التالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

السعة = $m \times n$

الصفوف ← m ، n → الاعمدة

العنصر العام لهذه المصفوفة a_{ij} هذا الذي يقع في الصف رقم i والعمود رقم j حيث $i=1,2,3,\ldots,m$ ، $j=1,2,3,\ldots,n$ ويمكن ان تكتب اختصاراً $A=[a_{ij}]$.

لذلك يمكن التعبير عن المنظومات الخطية بالمصفوفات وكالتالي:

مثال: اذا كان لدينا المنظومة الآتية:

$$-3x+4y+6z=10$$
$$3x-2y+z=7$$
$$x-z=1$$

فيمكن وضع معاملات المتغيرات (x,y,z) والتي بالطرف الايسر في صورة مصفوفة تسمى مصفوفة معاملات

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وكذلك يمكن تكوين ما يسمى بالمصفوفة الموسعة عند وضع الثوابت الموجودة في الطرف الايمن للمنظومة المعادلات الخطية وضعها جنباً الى جنب مع المعاملات الخطية اي ان:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

العمليات على المصفوفة :-

1- جمع مصفوفتين :-

ليكن $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

يعرف ناتج الجمع بالشكل الاتي :-

$$C=A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]_{m\times n}$$

مثال :- $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&2\\1&0&5\end{bmatrix}_{3\times3}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&3&3\end{bmatrix}_{3\times3}$

$$A+B=\begin{bmatrix}1+1&2+0&3+0\\3+2&4+1&2+0\\1+1&0+3&5+3\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}2&2&3\\5&5&2\\2&3&8\end{bmatrix}_{3\times3}$$

ملاحظة :- ان الشرط الضروري والكافي لعملية جمع اي مصفوفتين هو ان تكون السعات متساوية.

2- طرح مصفوفتين :-

ان عملية الطرح تحمل نفس خواص الجمع وايضاً يجب ان تكون السعات متساوية

مثال :- $A=\begin{bmatrix}1&5\\-1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&2\\3&2\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}1-(-1)&5-2\\-1-3&0-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&-2\end{bmatrix}_{2\times2}$$

3- ضرب مصفوفة بعدد :-

اذا كانت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ وان K اي عدد ثابت فان $K\cdot A=[K\cdot a_{ij}]_{m\times n}$

مثال :- $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $k=2$

$$k\cdot A=2\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)&2(2)\\2(3)&2(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\6&8\end{bmatrix}_{2\times2}$$

H.W جد ناتج ما يلي :-

$A=\begin{bmatrix}2&3&2\\0&4&1\\5&-1&3\end{bmatrix}_{3\times3}$ عندما

① $2A-3A$

② $-\frac{1}{2}A$

ع- ضرب المصفوفتين :-

اذا كانت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times q}$ فان حاصل الضرب $A\cdot B$ هو المصفوفة المعرفة بالشكل الاتي :-

$$C=A\cdot B=[a_{ij}]_{m\times n}\cdot[b_{ij}]_{n\times q}$$

$$=[c_{ij}]_{m\times q}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times q}$$

ملاحظة:- الشرط الضروري والكافي لعملية الضرب هو ان يكون عدد الاعمدة في الاولى = عدد الصفوف الثانية

مثال:- جد $A\cdot B$ اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2(2)+5(1)+(-1)(3) & 2(3)+5(5)+(-1)(6)\\ 3(2)+1(1)+1(3) & 3(3)+1(5)+1(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 25\\ 10 & 20\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

H.W جد $B\cdot A$ لنفس المثال السابق وماذا تلاحظ ؟

مبرهنة:- اذا كانت سعات المصفوفات A, B, C تلائم العمليات ازاءها فان كلا من الاتية على المصفوفات صحيحة :-

أ- قانون الابدال الجمعي $A+B=B+A$

ب- قانون التوزيع العددي $k(A+B)=kA+kB$

ج- قانون التجميع الضربي $A(BC)=(AB)C$

د- قانون التوزيع $A(B+C)=AB+AC$

H.W اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

اثبت ان قانون التوزيع متحقق (د)

المصفوفات الخاصة:

١- مصفوفة الصف: تسمى المصفوفة ذات صف واحد بمصفوفة الصف وتكون دائماً ذات شكل بسعة $(1\times n)$ مثل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0 & 4\end{bmatrix}_{1\times 5}$$

$$B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{bmatrix}_{1\times n}$$

٢- مصفوفة العمود: تسمى المصفوفة ذات عمود واحد بمصفوفة العمود وتكون بسعة $(m\times 1)$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}_{4\times 1}$$

٣- المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي عدد صفوفها = عدد أعمدتها وسعتها $m\times m$
مثل:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad B\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

٤- المصفوفة القطرية: القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة يتكون من العناصر a_{ii} أي العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ وبقية العناصر أصفار.
مثل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

القطر الرئيسي

٥- مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة قطرية قيمة كل عنصر فيها = 1 وتسمى بمصفوفة المحايد الضربي ويرمز لها بالرمز I او I_n حيث أن n يمثل سعة المصفوفة
مثل:

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

٦- المصفوفة القياسية الثابتة: هي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي فيها متساوية
مثل:

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

~~٧- المصفوفة الصفرية :- هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها اصفار~~

مثل :-

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}_{2\times2},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

٨- المصفوفة المثلثية العليا :- هي المصفوفة التي تكون جميع العناصر تحت القطر الرئيسي اصفار .

مثل :-

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&5\end{bmatrix}_{2\times2},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&6\\0&0&5\end{bmatrix}_{3\times3}$$

٩- المصفوفة المثلثية السفلى :- هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي اصفار .

مثل :-

$$C=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}_{2\times2}$$

١٠- منقول المصفوفة (مدور المصفوفة) A^T :- تدوير المصفوفة هي عملية تبادل الصفوف والاعمدة .

مثل :-

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&4&6\\7&8&9\end{bmatrix}_{3\times3},\quad A^T=\begin{bmatrix}1&5&7\\2&4&8\\3&6&9\end{bmatrix}$$

١١- المصفوفة المتناظرة (المتماثلة) :- هي المصفوفة المربعة والتي تكون فيها عناصر اعلى القطر الرئيسي صورة من عناصر اسفل القطر اي ان $a_{ij}=a_{ji}$

وبعبارة اخرى اذا كانت $A=A^T$

H.W اعطي مثال

١٢- المصفوفة المتناظرة العكسية :- هي مصفوفة تمتلك نفس خواص المصفوفة المتناظرة لكن العناصر اسفل القطر الرئيسي بعكس اشارة عناصر اعلى القطر الرئيسي اي ان $a_{ij}=-a_{ji}$

مثل :-

$$A=\begin{bmatrix}0&2&3\\-2&0&6\\-3&-6&0\end{bmatrix}$$

وبعبارة اخرى اذا كانت $A^T=-A$

مسار المصفوفة (trace) :- هو حاصل جمع عناصر القطر الرئيسي اي $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$

مثل :-

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

فان $tr(A)=1+5+0=6$

مبرهنة: اذا كان $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ فان الخواص الاتية صحيحة:

أ- $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

ب- $(A+B)^T = A^T + B^T$

ج- $(A^T)^T = A$

د- $(kA)^T = kA^T$

H.W اذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

هل ان $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$ ؟

س/ اذا كانت A مصفوفة مربعة فبرهن ان ١- $(A+A^T)$ هي مصفوفة متناظرة وان ٢- $(A^T\cdot A)$ ايضاً متناظرة.

البرهان: ١-

$$A+A^T = (A+A^T)^T$$
$$= A^T + (A^T)^T \quad [\text{حسب ب}]$$
$$= A^T + A \quad [\text{حسب ج}]$$

$\therefore$ $A+A^T$ متناظرة

٢-

$$A^T\cdot A = (A^T\cdot A)^T$$
$$= (A)^T (A^T)^T \quad [\text{حسب أ}]$$
$$= A^T\cdot A \quad [\text{حسب ج}]$$

$\therefore$ $A^T\cdot A$ متناظرة

٣- المصفوفة المتعامدة: يقال لمصفوفة مربعة A بانها متعامدة اذا تحقق

$$A\cdot A^T = A^T\cdot A = I$$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^T\cdot A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

١٤- المصفوفة الدورية :- هي المصفوفة التي تحقق العلاقة $A^{k+1}=A$ حيث k عدد صحيح موجب
وإذا كانت k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^{k+1}=A$ يقال بأن دورة المصفوفة A هي k وإذا كانت $k=1$ أي أن $A^2=A$ فإنها متساوية القوى

مثل :-

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$k=2$

$$A^3=A^{2+1}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A^2}\cdot A$$

$$=\begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}\cdot A$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}=A$$

∴ A دورية ودورتها = 2

١٥- المصفوفة معدومة القوى :- هي المصفوفة التي تحقق العلاقة $A^P=0$
إذا كانت P أصغر عدد صحيح موجب فإنه يمثل درجة A .

مثل :-

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\cdot A$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ A معدومة القوى من الدرجة = 2

العمليات السطرية الأولية :-

١- ضرب عناصر اي سطر بعدد غير صفري
٢- تبادل موضعي السطرين
٣- اضافة مضروب اي سطر بعدد الى اي سطر آخر

المصفوفة الأولية :- هي مصفوفة مربعة من السعة $n \times n$ يمكن تكوينها من المصفوفة المحايدة I_n بواسطة عملية واحدة من العمليات السطرية الأولية.

ملاحظة :- اذا اجريت عملية سطرية اولية على المصفوفة المحايدة I_n ينتج المصفوفة الاولية E وبالعكس اذا اجريت عملية سطرية معاكسة على المصفوفة I ينتج المصفوفة المحايدة I_n.

مثل :-

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فيمكن تحويل E الى I_3 بقسمة السطر الثالث / 3 فينتج $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

يقال للمصفوفة A بأنها تحقق الصيغة المدرجة سطرياً المختزلة اذا حققت الشروط الاتية.
١- اذا وجدت سطور صفرية تكتب الى الاسفل
٢- اول رقم غير صفري في كل سطر هو واحد يسمى الدليل
٣- الدليل يتجه الى اليمين كلما اتجهنا الى الاسفل
٤- العناصر فوق الدليل وتحت الدليل كلها اصفار
فاذا تحققت الشروط ١، ٢، ٣ تسمى الصيغة المدرجة سطرياً
واذا تحققت الشروط كلها تسمى الصيغة المدرجة سطرياً المختزلة.

امثلة :-

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ صيغة مدرجة سطرياً مختزلة}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ صيغة مدرجة سطرياً}$$

~~المصفوفتين المتكافئتين صفياً: هي المصفوفتين التي تكون احدهما ناتجة من الاخرى بعد اجراء~~ سلسلة منتهية من عمليات صفية اولية.

س/ اعطي مثال لتوضيح اعلاه H.W

ايجاد معكوس المصفوفة ..

اذا كانت A مصفوفة مكافئة صفياً للمصفوفة المحايدة I فان اجراء سلسلة منتهية من العمليات الصفية الاولية على A تؤدي الى I ولهذا نستطيع ايجاد معكوس المصفوفة A عن طريق كتابة مصفوفة الوحدة ومصفوفة $[A : I]$ ثم اجراء سلسلة من العمليات الصفية الاولية على الصفوف حتى نحصل على شكل $[I : B]$ حيث ذلك يكون $A^{-1}=B$

مثال: جد معكوس المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل/

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \to r_2 \\ r_2 \to r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] -2r_1+r_2 \to r_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2+r_1 \to r_2 \\ -r_2 \to r_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

للتحقق

$$AA^{-1}=I$$

H.W جد معكوس المصفوفات الاتية ..

1- $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

2- $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

س/ اثبت ان

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

الحل/

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$=AIA^{-1}$$
$$=AA^{-1}=I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B$$
$$=B^{-1}IB$$
$$=B^{-1}B=I$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

طرق حل منظومة المعادلات الخطية.

ان منظومة المعادلات السابقة والتي تتكون من m من المعادلات و n من المجاهيل يمكن ايجاد الحلول لها بعد تحويل مصفوفتها الموسعة $[A:B]$ الى الصيغة المدرجة الصفية بطريقة حذف كاوس وطريقة حل المنظومة بتحويل مصفوفتها الموسعة الى الصيغة المدرجة الصفية المختزلة بطريقة حذف كاوس جوردان

مثال ١. حل منظومة المعادلات الخطية الاتية بطريقة حذف كاوس:

$$5x - 10y = 15$$
$$-2x - y = -1$$

الحل/

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -10 & 15 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{r_1}{5} \to r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2r_1 + r_2 \to r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{r_2}{5} \to r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} 1(x) - 2y = 3 \\ \text{بالتعويض} \\ \to y \end{array}$$

$x = 3 - 2y = 1$ ، $y = -1$ ∴ مجموعة الحل

(التعويض تراجعي من الاسفل الى الاعلى)

∴ مجموعة الحل $(1, -1)$

لو اردنا طريقة حذف كاوس جوردان نكمل الحل كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{2r_2 + r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} x \\ y \end{array}$$

∴ مجموعة الحل $(1, -1)$

(الحل هنا يبدأ من الاعلى الى الاسفل بالتسلسل للمتغيرات)

س/ جد حل منظومة المعادلات الخطية الاتية بطريقتين:

١- حذف كاوس

٢- حذف كاوس جوردان

$$x_1 + 2x_2 + 3x_2 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 \quad - x_3 = 3$$

مثال: حل منظومة المعادلات الآتية:

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5$$
$$x_1+3x_2+5x_3+7x_4=11$$
$$x_1 \quad -x_3-2x_4=-6$$

الحل/

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_1+r_2\rightarrow r_2 \\ -r_1+r_3\rightarrow r_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right] 2r_2+r_3\rightarrow r_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نلاحظ المعادلة الاخيرة

$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=1$$

وهذا تناقض

∴ ليس للمنظومة حل.

مثال: حل منظومة المعادلات الخطية الآتية: بطريقة حذف كاوس

$$x+2y-3z=6$$
$$2x-y+4z=2$$
$$4x+3y-2z=14$$

الحل/

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2r_1+r_2\rightarrow r_2 \\ -4r_1+r_3\rightarrow r_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_2/5\rightarrow r_2 \\ -r_2+r_3\rightarrow r_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

نلاحظ ان عدد المعادلات = 2 وعدد المجاهيل = 3

∴ يوجد عدد غير منتهي من الحلول

$$y-2z=2 \Rightarrow y=2+2z$$

$$y=2+2t \Leftarrow z=t \text{ نفرض}$$

$$x+2y-3z=6 \Rightarrow x=6-2y+3z$$
$$=6-2(2+2t)+3t$$
$$=2-t$$

∴ مجموعة الحلول $\{\overset{x}{2-t},\ \overset{y}{2+2t},\ \overset{z}{z=t}\}$

المحددات :- لكل مصفوفة مربعة لعدد ثابت يسمى محدد المصفوفة ويرمز له بالرمز $|A| = det(A)$.

م-

كيفية ايجاد المحدد :-

1- محدد المصفوفة ذات السعة 1×1

$$A=[a]_{1\times1} \Rightarrow |A|=a$$

مثال :- $A=[3] \Rightarrow |A|=3$

2- محدد المصفوفة ذات السعة 2×2

القطر الرئيسي

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

القطر الثانوي

مثال :- $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2(4) - 3(-1) = -5$

3- محدد المصفوفة ذات السعة 3×3

أ- طريقة الاقطار

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$\Rightarrow |A| = \left| \begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

مثال :- جد قيمة المحدد للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \left| \begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right| = (1(1)(2)+2(3)(3)+3(2)(1)) - (3(1)(3)+1(3)(1)+2(2)(2)) = 6$$

H.w س ١/ جد قيمة λ عندما يكون $|A|=0$ حيث ان

$$A=\begin{bmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

خواص المحددات:-

١- اذا كانت A مصفوفة مربعة فأن $|A| = |A^T|$

٢- اذا كانت B مصفوفة ناتجة من المصفوفة المربعة A بالمبادلة بين اي سطرين (عمودين) في A فأن $|B| = -|A|$

٣- اذا تساوى سطرين او عمودين في مصفوفة مربعة A فان المحدد $|A| = 0$

٤- اذا كان كل عنصر من سطر او عمود في المصفوفة مربعة A = صفر فان $|A| = 0$
(اي بمعنى اذا وجد سطر او عمود جميع عناصره اصفار)

٥- اذا كانت B مصفوفة مربعة ناتجة من ضرب سطر او عمود واحد في المصفوفة A بعدد ثابت k فان $|B| = k|A|$

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right| = 21$$

وان $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ نلاحظ ان B هي ناتجة من A بعد ضرب عناصر الصف الاول بالعدد 2 $\Leftarrow |B| = 2|A| = 2(21) = 42$

٦- اذا كانت المصفوفة B ناتجة من اضافة مضروب احد السطور او الاعمدة في A بثابت واضافته الى سطر (عمود) اخر فان $|A| = |B|$

٧- اذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين لهما السعة نفسها فان محدد $|AB| = |A||B|$

٨- وكذلك $|A+B| \neq |A| + |B|$

مبرهنة:- المصفوفة المربعة A قابلة للانعكاس $\Leftarrow |A| \neq 0$

نتيجة:- اذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للانعكاس فان $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

٩- اذا كانت المصفوفة المثلثية عليا او سفلى فان المحدد = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$ فان

مثال/ س/ احسب محدد المصفوفة الاتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ب- ايجاد محدد مصفوفة باستخدام العوامل المتممة (cofactor) :-

المصغر (minor) للعنصر a_{ij} في المصفوفة المربعة A يرمز له بالرمز M_{ij} :-
هو المصفوفة الناتجة من حذف الصف رقم i والعمود رقم j من المصفوفة

العامل المتمم للعنصر a_{ij} - هو حاصل ضرب $(-1)^{i+j}$ في محدد المصغر ل a_{ij} اي ان

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مبرهنة:- قيمة اي محدد تساوي حاصل ضرب عناصر اي صف او عمود في عوامله المتممة اي ان

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

مثال:- جد محدد المصفوفة التالية باستخدام العوامل المتممة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل/ نأخذ الصف الاول

$$A_{11} = (-1)^{1+1=2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$\therefore |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 2(3) + (-1)(3) + 3(9) = 30$$

ملاحظة:- اختيار الصفوف وحتى الاعمدة ليس عليه شرط او قيد لكن يفضل الصف او العمود الذي فيه اكبر عدد من الاصفار.

H.W/ س/ اثبت ان $|A^T| = |A|$ اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل منظومة المعادلات الخطية باستخدام المحددات (قاعدة كرامر):-

لتكن لدينا منظومة معادلات خطية كما عبرنا عنها سابقاً بحيث يمكن ان نعبر عنها باختصار $AX=B$ حيث ان a_{ij} ، b_{ij} ثوابت معلومة كما ان مصفوفة المعاملات ≠ صفر اي ان $|A|\neq 0$ فان للمنظومة حل وحيد.

فان الحل هو

$$x_1=\frac{|A_1|}{A},\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \dots,\ x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$$

حيث A_i $(i=1,\dots,n)$ هي المصفوفة الناتجة من احلال عناصر المصفوفة B محل العمود من الموقع i من المصفوفة A.

مثال:- استخدم قاعدة كرامر لحل منظومة المعادلات الآتية:-

$$-2x_1+3x_2-x_3=1$$
$$x_1+2x_2-x_3=4$$
$$-2x_1-x_2+x_3=-3$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

نفك الصف الثاني

$$|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-4,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-8$$

$$|A|=1(-2)+2(-4)+(-1)(-8)=-2\Rightarrow |A_1|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}=-4$$

$$|A_1|=-4\Rightarrow x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$|A_2|=-6\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=-6\Rightarrow x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$|A_3|=-8\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix}=-8\Rightarrow x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-8}{-2}=4$$

إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام العوامل المرافقة (المتممة) -

لكي يكون للمصفوفة معكوس قلنا يجب ان يكون $|A| \neq 0$

فلذلك يمكن ايجاد المعكوس من العلاقة الآتية

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T}{|A|}$$

حيث ان مدور مصفوفة العوامل المرافقة تسمى (بالمصفوفة المصاحبة) ويرمز لها بالرمز $adj(A)$

لذا فان $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$

مثال - جد معكوس المصفوفة الآتية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل/

$|A| = 1$

$A_{11} = 2 , A_{12} = -1 , A_{21} = -3 , A_{22} = 2$

$$\therefore A_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T}{1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

H.W س/ جد معكوس المصفوفة الآتية باستخدام العوامل المرافقة ،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

متجه الوحدة : Unit Vector

هو ذلك المتجه الذي طوله = ١ ، ليكن $\vec{X}$ متجه غير صفري فأن :

$$U = \frac{1}{\|X\|} \cdot X$$

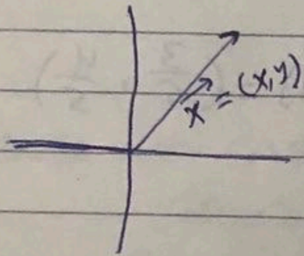
هو متجه وحدة باتجاه $\vec{X}$.

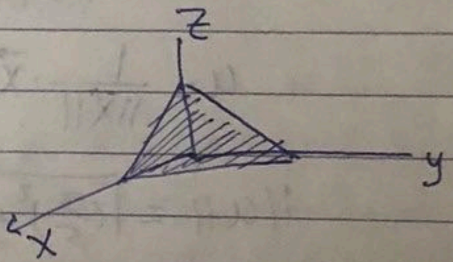
المتجهات من النمط n : n-vectors

مقابل للمصفوفة :-

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

حيث كل من $x_1, x_2, \dots, x_n$ اعداد حقيقية بأنه متجه من النمط n حيث تدعى $x_1, x_2, \dots, x_n$ بمركبات المتجه $\vec{X}$





ملاحظة : ليكن $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ، $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

١- تتساوى المتجهان $\iff x_i = y_i$

٢- تعرف عملية الجمع $\vec{X} + \vec{y}$ بالشكل

$$\vec{X} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

٣- تعرف $c.\vec{X}$ حيث c عدد حقيقي بالشكل

$$c\vec{X} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

٤- يرمز لمجموعة المتجهات من النمط n بالرمز R^n اي ان $R^n = \{\vec{X}$: X متجه من النمط n$\}$

مبرهنة : ليكن كل من $\vec{X}$ ، $\vec{y}$ ، $\vec{z}$ متجهات من R^n وان c, d اعداد حقيقية فأن :

أ- $\vec{X} + \vec{y}$ متجه من R^n {اي عملية الجمع مغلقة}

١- $\vec{X} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{X}$ (الابدالية)

٢- $\vec{X} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{X} + \vec{y}) + \vec{z}$ (تجميعية)

٣- يوجد متجه (المتجه الصفري) في R^n حيث $\vec{X} + \vec{0} = \vec{X}$

عندما $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

٤- يوجد متجه وحيد $(-\vec{X})$ وان $-\vec{X} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$

ب- أن $c\vec{x}$ متجه في R^n ~~(مغلقة بالنسبة لعملية الضرب بعدد حقيقي)~~

١- $c(\vec{x}+\vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$

٢- $(c+d)\vec{x} = c\vec{x} + d\vec{x}$

٣- $c(d\vec{x}) = (cd)\vec{x}$

٤- $I\vec{x} = \vec{x}$ حيث I هي المصفوفة الواحدية

مثال:- ليكن $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

جد $\vec{x} - \vec{y}$

الحل:- $\vec{x} + (-\vec{y}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$

مثال:- ليكن $\vec{x} = (3,4)$ جد متجه الوحدة u

الحل:- $\|x\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$u = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

طول المتجه R^n :-

ليكن $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ متجه في R^n فان طول $\vec{x}$ هو $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

والمسافة بين متجهين $\vec{x}$ ، $\vec{y}$ هي $d\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

ونعرف الجداء الداخلي (الضرب النقطي) لـ $\vec{x}$ ، $\vec{y}$ بالشكل

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

مثال:- اذا كان $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ جد:

١- $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ، ٢- المسافة بين $\vec{x}$ ، $\vec{y}$ ، ٣- طول $\vec{x}$ و $\vec{y}$

الحل:

١- $\vec{x} \cdot \vec{y} = 2(3) + 1(1) + 0(-1) = 7$

٢- $d\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

٣- $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{y}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

مبرهنة :- اذا كان كلاً من $\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}$ متجهات في R^n و c عدد حقيقي فان :-

1- $\vec{x}\cdot\vec{x} = \|\vec{x}\|^2 \geq 0$

2- $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$ H.W

3- $(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z} = \vec{x}\cdot\vec{z} + \vec{y}\cdot\vec{z}$

4- $(c\vec{x})\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot(c\vec{y}) = c(\vec{x}\cdot\vec{y})$

مبرهنة :- (متباينة كوشي - شوارتز)

اذا كان كلاً من $\vec{x}$, $\vec{y}$ متجهين في R^n فان $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$.

ولعرف اتجاه المتجه بانه ($\cos\theta$) المحصورة بين متجهين في R^n بالصيغة التالية :-

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

ويقال للمتجهين $\vec{x}$, $\vec{y}$ في R^n :

1- متعامدين اذا كان $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0 \Leftarrow \cos\theta = 0 \Leftarrow \theta = 90$

2- متوازيين اذا كان $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Leftarrow \cos\theta = \mp 1$

3- بنفس الاتجاه اذا كان $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Leftarrow \cos\theta = 1$,

مبرهنة :- (المتباينة المثلثية) :-

اذا كان كلاً من $\vec{x}$, $\vec{y}$ متجهان في R^n فان $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

البرهان :-

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y)$$
$$= x\cdot x + 2xy + y\cdot y$$
$$= \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \text{[حسب متباينة كوشي - شوارتز]}$$
$$\therefore \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(و. هـ. م)

~~متجهات الوحدة في الاتجاهات الموجبة للمحاور (x,y,z) يرمز لها (i,j,k)~~

فاذا كان $\vec{X}=(x,y,z)$ متجه في R^3 فانه يكتب بدلالة i,j,k كالتالي :-

$$\vec{X}=xi+yj+zk$$

ويمكن تعميم ذلك الى R^n بنفس الاسلوب :

$$\vec{X}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\ ,\ \vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

الجداء التصالبي : (الضرب الاتجاهي)

اذا كان المتجهان $\vec{X}=x_1i+x_2j+x_3k$

$\vec{y}=y_1i+y_2j+y_3k$

نعرف الجداء التصالبي $\vec{X}\times\vec{y}$ بالشكل الاتي :-

$$\vec{X}\times\vec{y}=(x_2y_3-x_3y_2)i-(x_1y_3-x_3y_1)j+(x_1y_2-x_2y_1)k \quad *$$

ويمكن التعبير عنه بالصيغة

$$\vec{X}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}$$

$$= *$$

مثال :- جد $\vec{X}\times\vec{y}$ اذا كان $\vec{X}=2i+j+2k$, $\vec{y}=3i-j-3k$

الحل :-

$$\vec{X}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=-i+12j-5k$$

مبرهنة :- اذا كان كل من $\vec{X},\vec{y},\vec{Z}$ متجهات وكان c عدد حقيقي فان :-

1- $\vec{X}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{X}$

2- $X\times(y+Z)=X\times y+X\times Z$

3- $(X+y)\times Z=X\times Z+y\times Z$ س

4- $c(X\times y)=cX\times y=X\times(cy)$

5- $\vec{X}\times\vec{X}=\vec{0}$

6- $\vec{0}\times\vec{X}=\vec{X}\times\vec{0}=\vec{0}$

7- $(X\cdot y)\times Z=(Z\cdot X)y\cdot(Z\cdot y)X$?

البرهان :-

1- $$\vec{X}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=i(x_2y_3-x_3y_2)-j(x_1y_3-x_3y_1)+k(x_1y_2-x_2y_1)$$

$$\vec{y}\times\vec{X}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ y_1 & y_2 & y_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}=i(y_2x_3-x_2y_3)-j(x_3y_1-x_1y_3)+k(x_2y_1-x_1y_2)$$

$$\therefore\ \vec{X}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{X} \qquad (\text{و.هـ.م})$$

~~بعض الخواص التي تربط الجداء الداخلي مع الجداء الاتجاهي :- (اي يقصد الضرب القياسي مع الضرب الاتجاهي)~~

1- $(X\times y)\cdot Z = X\cdot(y\times Z)$

2- $X\times(y\times Z) = (X\cdot Z)y - (X\cdot y)Z$

3- $(X\times y)\cdot y = X\cdot(y\times y) = X\cdot 0 = 0$

4- $(X\times y)\cdot X = -(y\times X)\cdot X$
$= -y(X\times X)$
$= -y\cdot 0$
$= 0$

فضاء المتجهات والفضاءات الجزئية :-

يقال للمجموعة V من عناصر (متجهات) مع عمليتي $\oplus$ ، $\odot$ بأنها فضاء متجهات اذا تحققت الشروط الاتية :-

1- V مغلقة وتحت عملية الجمع $\oplus$ (اي ان لكل $\vec X,\vec Y\in V$ فان $\vec X+\vec Y\in V$)

2- اذا كان $\vec X$, $\vec Y$ في V فانه $\vec X\oplus\vec Y=\vec Y\oplus\vec X$

3- لكل $\vec X,\vec Y,\vec Z\in V$ فان $\vec X\oplus(\vec Y\oplus\vec Z)=(\vec X\oplus\vec Y)\oplus\vec Z$

4- يوجد عنصر وحيد $\vec 0$ في V بحيث ان $\vec X\oplus\vec 0=\vec 0\oplus\vec X$

5- لكل $\vec X\in V$ يوجد عنصر وحيد $V \ni \vec X$ بحيث ان $\vec X\oplus -\vec X=\vec 0$

6- V مغلقة بالنسبة لعملية الضرب $\odot$ (اي انه اذا كان $\vec X,\vec Y\in V$ فان $\vec X\odot\vec Y\in V$) واذا كان k عدد حقيقي وكان $\vec X$ اي عنصر في V فان $k\vec X$ ينتمي الى V

7- $k(\vec X\oplus\vec Y)=k\vec X\oplus k\vec Y$

8- $(k_1\oplus k_2)\odot\vec X=k_1\vec X\oplus k_2\vec X$

9- $k_1\odot(k_2\odot\vec X)=(k_1k_2)\odot\vec X$

10- $1\odot\vec X=\vec X$

مثال :- $V=R^n$ مع عمليتي الجمع والضرب هو فضاء متجهات

H.W / لتكن $V=R^2$ والعمليتين $\odot$ ، $\oplus$ معرفتين بالشكل الاتي :-

$(u_1,v_1)\oplus(u_2,v_2)=(u_1+u_2, v_1+v_2)$

$k(u,v)=(u,kv)$

هل V تمثل فضاء متجهات ؟

تعريف :- اذا كانت W مجموعة جزئية غير خالية من فضاء المتجهات V فان W فضاء جزئي من V اذا تحققت الشرطان :-

1- W مغلقة لعملية الجمع اي اذا كان $\vec u$, $\vec v$ في W فان $\vec u+\vec v$ في W ايضاً

2- W مغلقة لعملية الضرب بعدد اي اذا كان $\vec u$ في W و k عدد حقيقي فان $k\vec u$ في W ايضاً

الاستقلال الخطي:-

تعريف: لتكن المجموعة $S=\{\vec{X_1},\vec{X_2},\dots,\vec{X_n}\}$ مجموعة متجهات مختلفة في فضاء المتجهات B تقال للمجموعة S بانها غير مستقلة خطياً بل مرتبطة خطياً اذا وجدت ثوابت ليست جميعها اصفار $c_1,c_2,\dots,c_n$ بحيث ان $c_1\vec{X_1}+c_2\vec{X_2}+c_3\vec{X_3}+\dots+c_n\vec{X_n}=\vec{0}$ ①

وبعكسه تقال للمجموعة S مستقلة خطياً اذا كانت المعادلة ① تتحقق فقط عندما يكون

$$c_1=c_2=c_3\cdots c_n=0$$

مثال:- تأمل المتجهات الاتية في الفضاء R^4 بين فيما اذا كانت المجموعة $S=\{X_1,X_2,X_3\}$ مستقلة خطياً ام لا؟

$X_1=(1,0,1,2)$ ، $X_2=(0,1,1,2)$ ، $X_3=(1,1,1,3)$

الحل:- نفرض ان

$$\vec{0}=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3$$

$$(0,0,0,0)=c_1(1,0,1,2)+c_2(0,1,1,2)+c_3(1,1,1,3)$$

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_3&=0\\ c_2+c_3&=0\\ c_1+c_2+c_3&=0\\ 2c_1+2c_2+3c_3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&0\\2&2&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3\to r_4]{r_3-r_1\to r_3}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}c_1&c_2&c_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}\Rightarrow\begin{aligned}c_2&=0\\c_3&=0\\c_1&=0\end{aligned}$$

$\therefore$ X_1,X_2,X_3 مستقلة خطياً

H.W / هل ان المتجهات $\vec{X_1},\vec{X_2},\vec{X_3}$ مستقلة خطياً ام لا؟

$X_1=(1,-2,1)$ ، $X_2=(2,1,-1)$ ، $X_3=(7,-4,1)$

ملاحظة:- عند ايجاد الثوابت $c_1,c_2,\dots,c_n$ ممكن عند الحصول على منظومة المعادلات ان نجد مصفوفة المعاملات واذا كانت مربعة يرمز لها A ولها الحالتين الاتيتين:-

أ- اذا كان $|A|\neq0$ فان الحل الوحيد هو الحل الصفري اي ان $c_1=c_2=\dots=c_n=0$
$\therefore$ مجموعة المتجهات مستقلة خطياً

ب- اذا كان $|A|=0$ فالحل معقد وبالامكان ايجاد حل غير صفري اي ان المتجهات (غير مستقلة خطياً) مرتبطة خطياً.

ملاحظات:-

1- اذا كانت $S=\{X_1,X_2,\dots,X_r\}$ مجموعة متجهات من R^n وكانت $|S|=r$ وان $r>n$ فان S غير مستقلة خطياً (مرتبطة خطياً)

2- اذا كانت S مجموعة متجهات مستقلة خطياً فان اي مجموعة جزئية من S بواحد او اكثر من المتجهات هي ايضاً مستقلة خطياً.

التركيب الخطي :- ليكن V فضاء متجهات وان $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n}$ متجهات في V فيقال للمتجه $\vec{X}$ في V بانه تركيب خطي من $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n}$ اذا امكن التعبير عن $\vec{X}$ بالشكل الاتي :-

$$\vec{X} = k_1\vec{X_1} + k_2\vec{X_2} + k_3\vec{X_3} + \dots + k_n\vec{X_n}$$

حيث $k_1, k_2, \dots, k_n$ اعداد حقيقية .

مثال :- هل ان المتجه $(2,1,5,-5)$ هو تركيب خطي من المتجهات :

$\vec{X_1} = (1,2,1,-1)$

$\vec{X_2} = (1,0,2,-3)$

$\vec{X_3} = (1,1,0,-2)$

الحل :-

$$\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} + c_3\vec{X_3}$$

$$(2,1,5,-5) = c_1(1,2,1,-1) + c_2(1,0,2,-3) + c_3(1,1,0,-2)$$

$c_1 + c_2 + c_3 = 2$

$2c_1 + 0c_2 + c_3 = 1$

$c_1 + 2c_2 + 0c_3 = 5$

$-c_1 - 3c_2 - 2c_3 = -5$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$-3c_3 = 3 \Rightarrow c_3 = -1$

$c_2 + 1 = 3 \Rightarrow c_2 = 2$

$c_1 + 2 - 1 = 2 \Rightarrow c_1 = 1$

امكن ايجاد قيم (c_1, c_2, c_3) :

بحيث يمكن كتابة $\vec{X}$ بالشكل $c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} + c_3\vec{X_3} =$

تعريف :- لتكن المجموعة $S = \{\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n}\}$ مجموعة متجهات في فضاء المتجهات V يقال بأن S تولد الفضاء V اذا كان كل متجه في V هو تركيب خطي من متجهات المجموعة S.

مثال :- بين ان المتجهات $\left\{ \vec{X_1} = (0,0,1), \ \vec{X_2} = (0,1,2), \ \vec{X_3} = (1,2,3) \right.$ تولد $V = R^3$

الحل :- نأخذ متجه اختياري $\vec{X} = (a,b,c) \in R^3$ ونفرض ان $\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} + c_3\vec{X_3}$

$$(a,b,c) = c_1(0,0,1) + c_2(0,1,2) + c_3(1,2,3)$$

$$c_3 = a, \quad c_2 = b - 2a, \quad c_1 = c - 2b + a$$

$\Leftarrow$ $\vec{X} \in R^3$ هو تركيب خطي من x_1, x_2, x_3

$\Leftarrow$ S تولد R^3

~~٣- اذا كانت احد المتجهات $x_1, x_2, \dots, x_n$ متجه صفري فان المجموعة S مرتبطة خطياً~~
(غير مستقلة).

مثال:- هل ان المتجهات $(7,2,-1)$ ، $(0,1,4)$ ، $(1,3,3)$ ، $(5,6,3)$
مرتبطة خطياً ام مستقلة؟

الحل:-

$|S| = r = 4$
$n = 3$
$\Rightarrow r > n$
$4 > 3$

$\therefore$ المتجهات غير مستقلة

القاعدة والبعد: Basis and Demension

تعريف:- اذا كان V فضاء متجهات وان $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات في V نقول بان S قاعدة للفضاء V اذا كانت:-

1- S مستقلة خطياً
2- S تولد الفضاء V.

مثال:- المجموعة $S = \{(1,0), (0,1)\}$ هي قاعدة تولد R^2.

مثال:- المجموعة $S = \{(0,1,0), (-1,2,1), (3,2,2)\}$
تمثل قاعدة للفضاء R^3 ؟

الحل:- 1- نثبت ان المتجهات مستقلة خطياً.

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$\therefore$ S مستقلة خطياً

2- نفرض متجه اختياري $X = (a, b, c)$

$$(a,b,c) = k_1 (0,1,0) + k_2 (-1,2,1) + k_3 (3,2,2)$$

$$k_1 = b - \frac{2}{5}(4c - a)$$

$$k_2 = \frac{1}{5}(3c - 2a)$$

$$k_3 = \frac{c + a}{5}$$

$\therefore$ S تولد R^3

~~س1/ هل ان $S=\{M_1,M_2,M_3,M_4\}$ تمثل قاعدة لـ $M_{2\times2}$ حيث ان~~

$$M_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ M_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ M_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ M_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

2 هل ان المتجهات $S=\{(1,1),(-2,5)\}$ هي قاعدة لـ R^2 .

ملاحظة :- R^n هو فضاء متجهات ذو عناصره n $R^n=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

$M_{m\times n}$ هو فضاء متجهات على شكل مصفوفة ذو عناصره $m\cdot n$

$P_n(t)$ هو فضاء متجهات على شكل متعدد الحدود من الدرجة n ذو عناصره $n+1$

$P_n(t)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$

ملاحظة :- المجموعة المستقلة الفضاء ذات بعد n يكون عدد عناصرها اقل او يساوي n والمجموعة التي تولد الفضاء يكون عدد عناصرها اكبر او يساوي n وعليه يكون عدد عناصر القاعدة يجب ان يكون n .

مثال :- هل ان المجموعة $S=\{\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3}\}$ تمثل قاعدة لـ $P_3(t)$ حيث،

$x_1=t^3+t^2+1,\ x_2=t^3-1,\ x_3=t^3+t^2$

الحل :- عدد العناصر لـ $S = 3$

وبعد $P_3(t) = 3+1=4$

$3<4$

∴ المجموعة لا تولد $P_3(t)$

∴ ليست قاعدة للفضاء $P_3(t)$.

مبرهنة (1) :- اذا كانت S قاعدة لـ V فان كل متجه في V يمكن كتابته بطريقة واحدة فقط على شكل تركيب خطي من متجهات S .

مبرهنة (2) :- اذا كانت S مجموعة متجهات غير صفرية تولد V فان هناك قاعدة لـ V محتواة في S

مبرهنة (3) :- لتكن S $\{\vec{x_1},\vec{x_2},\dots,\vec{x_n}\}$ قاعدة للفضاء V و $T=\{\vec{y_1},\vec{y_2},\dots,\vec{y_r}\}$ مجموعة مستقلة خطياً فان $r\le n$

~~نتيجة: لتكن $S=\{\vec{x_1},\vec{x_2},\dots,\vec{x_n}\}$ ، $T=\{\vec{y_1},\vec{y_2},\dots,\vec{y_m}\}$ قاعدتين لفضاء متجهات V فان~~
$m=n$.

البرهان:- ∵ S قاعدة لـ V
T مستقلة خطياً فان $m\leq n$ (حسب المبرهنة 3)
∵ T قاعدة لـ V وان S مستقلة خطياً فان $n\leq m$
∴ $m=n$.

تعريف:- بعد فضاء المتجهات غير صفري V هو عدد المتجهات في قاعدة V
ونرمز له بالرمز $\dim V$

مثال:-
$$\dim R^n = n$$
$$\dim M_{m\times n} = m\cdot n$$
$$\dim P_n(t) = n+1$$

ملاحظة:- اذا كان $\dim V=n$ فان اي مجموعة تحتوي (n+1) من المتجهات في V يجب ان تكون مرتبطة خطياً وان المجموعة التي تحتوي (n-1) من المتجهات لا يمكن ان تولد V .

مثال:- ليكن V فضاء جزئي من R^3 مولد من $S=\{x_1,x_2,x_3\}$ حيث:
$$x_1=(0,1,1),\ x_2=(1,0,1),\ x_3=(1,1,2)$$
جد $\dim V$ ؟

الحل:- ∵ V مولد من S فان اي متجه في V (a,b,c)
يمكن كتابته بالشكل التالي
$$(a,b,c)=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3$$
ولكن S مرتبطة خطياً لان المتجه الثالث
$$x_3=x_1+x_2$$
فعند حذفه تصبح $S_1=\{x_1,x_2\}$ وهي تولد V
فان S_1 مستقلة خطياً
$$k_1x_1+kx_2=0$$
$$k_1(0,1,1)+k_2(1,0,1)=(0,0,0)\Rightarrow k_1=k_2=0$$
∴ S_1 مجموعة مستقلة خطياً وهي تولد V
بينما x_3 هو تركيب خطي
∴ S_1 قاعدة لـ V
$$\dim V=2$$

مبرهنة (4):- ليكن U , W فضاءين جزئيين من الفضاء V فان:
$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

س:H.W/ اذا كان U , W فضاء جزئي من الفضاء V فان U+W فضاء جزئي ايضاً
برهن ذلك ؟

مثال: جد قاعدة وبعد الفضاء الجزئي W من R^4 حيث:

$W = \{(a,b,c,d) : c = a-b,\ d = a+b,\ a,b \in R\}$

الحل: المتغيرات الحرة هي a,b

$\therefore \dim W = 2$

لكي نجد القاعدة نضع

① $a=1, b=0, c=1, d=1 \Rightarrow (1,0,1,1)$

② $a=0, b=1, c=-1, d=1 \Rightarrow (0,1,-1,1)$

$\therefore$ القاعدة هي

$\{(1,0,1,1), (0,1,-1,1)\}$

H.w / ليكن U فضاء جزئي من R^4 بالشكل الآتي: $U = \{(a,b,c,a+b), a,b,c \in R\}$.
جد قاعدة وبعد U ؟

فضاء الصفوف والأعمدة ورتبة المصفوفة:

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة من السعة $m \times n$ فيقال للمتجهات:

$\vec{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$r_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$

$\vdots$

$\vec{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

المكونة من صفوف المصفوفة A بمتجهات الصفوف ويقال للمتجهات

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \vec{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

المكونة من أعمدة A بمتجهات الأعمدة للمصفوفة A

مثال: لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ فإن المتجهات الصفوف لـ A هي:

$\vec{r}_1 = (3,4)$

$\vec{r}_2 = (2,1)$

$r_3 = (0,6)$

ومتجهات الأعمدة

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: ~~تماثل الفضاء الجزئي من R^n المتولد من متجهات السطور بفضاء السطور~~
للمصفوفة A والفضاء الجزئي من R^m المتولد من الاعمدة بفضاء الاعمدة للمصفوفة A.

مبرهنة (1): العمليات السطرية الاولية لا تغير من فضاء السطور للمصفوفة.

مبرهنة (2): متجهات السطور غير الصفرية من الصيغة المدرجة سطرياً للمصفوفة A تكون قاعدة لفضاء السطور للمصفوفة A.

مثال: جد قاعدة الفضاء المتولد من المتجهات
$\vec{V_1}=(1,0,1,2,1),\ \vec{V_2}=(1,0,1,2,2),\ \vec{V_3}=(2,1,0,1,2),\ \vec{V_4}=(1,1,-1,-1,1)$

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\1&0&1&2&2\\2&1&0&1&2\\1&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1\to r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\0&0&0&0&1\\1&1&-1&-1&0\\2&1&0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\1&1&-1&-1&0\\2&1&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\0&1&-2&-3&-1\\0&1&-2&-3&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\0&1&-2&-3&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\0&1&-2&-3&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}}_{\text{مدرجة سطرياً}}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&-2&-3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}}_{\text{مدرجة سطرياً مختزلة}}$$

∴ متجهات السطور غير الصفرية هي:
$\vec{w_1}=(1,0,1,2,0),\ \vec{w_2}=(0,1,-2,-3,0),\ \vec{w_3}=(0,0,0,0,1)$
وهي قاعدة لفضاء السطور وهي قاعدة للفضاء المتولد من V_1,V_2,V_3,V_4

ولايجاد بعد فضاء الاعمدة نتبع المثال الآتي:-

مثال: لتكن $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&3\\0&-3&3\end{bmatrix}$ جد بعد فضاء الاعمدة لـ A وقاعدة فضاء الاعمدة؟

الحل:

$$A^T=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&-3\\1&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{عمليات سطرية}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-6\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\text{مدرجة سطرياً مختزلة}}$$

نلاحظ ان السطور غير الصفرية لـ A^T هو عدد الاعمدة غير الصفرية لـ A اي ان (بعد فضاء الاعمدة لـ A = 2) وقاعدة فضاء الاعمدة هي:-

$$\vec{C_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\-6\end{bmatrix},\ \vec{C_2}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$$

H-W/ جد قاعدة فضاء السطور لـ A ؟

~~تعريف: يقال لبعد فضاء السطور وفضاء الاعمدة للمصفوفة A برتبة المصفوفة~~ A ويرمز لها بالرمز $r(A)$.

مبرهنة (1): تكون المصفوفة من السعة $(n \times n)$ غير شاذة (لها معكوس) $\Leftrightarrow$ كانت رتبتها A .

نتيجة (1): اذا كانت A مصفوفة من الصنف $n \times n$ فان رتبة A تساوي A $\Leftrightarrow$ المحدد $\neq 0$

نتيجة (2): للنظام المتجانس $AX=0$ المكون من n من المعادلات و n من المجاهيل حل غير صفري (غير تافه) $\Leftrightarrow$ كانت رتبة A اقل من n .

مثال: $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\2&1&3\end{bmatrix}$ هل ان $AX=0$ له حل صفري ام لا ؟

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\2&1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\text{صيغة مدرجة صفياً مختزلة}}$$

$\Rightarrow r(A)=3$

بعد فضاء السطور = بعد فضاء الاعمدة = 3

A غير شاذة

$\therefore$ حسب نتيجة (2) تكون للمنظومة حل صفري فقط.

H.W/ لتكن $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&-3\\1&3&3\end{bmatrix}$ هل ان $AX=0$ له حل صفري ام لا ؟

التحويلات الخطية :

تعريف :- التحويل T من الفضاء V الى الفضاء W هو تطبيق بحيث يتحقق ما يلي :- $T:V\to W$

١- لكل $\vec{u},\vec{v}\in V$ فان

$$T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$$

٢- لكل عدد حقيقي k ولكل $v\in V$ فان

$$T(k\vec{v})=kT(\vec{v})$$

مثال :- بين فيما اذا كانت الدالة $T:R^2\to R^3$ المعرفة بالشكل :

$$T(x,y)=(y,x+2y,2x-y)$$

تحويل خطي ام لا ؟

الحل :- نأخذ اي متجهين اختياريين $\vec{u},\vec{v}\in R^2$ حيث ان

$\vec{u}=(x_1,y_1)$

$\vec{v}=(x_2,y_2)$

فان

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v})=T(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$=(y_1+y_2,x_1+x_2+2y_1+y_2,2x_1+2x_2-y_1-y_2)$$

نأخذ الطرف الايمن

(1) $$T(\vec{u})=T(x_1,y_1)=(y_1,x_1+2y_1,2x_1-y_1)$$

$$T(\vec{v})=T(x_2,y_2)=(y_2,x_2+2y_2,2x_2-y_2)$$

$$T(\vec{u})+T(\vec{v})=(y_1+y_2,x_1+x_2+2y_1+2y_2,2x_1+2x_2-y_1-y_2)$$
$$=T(\vec{u})+T(\vec{v})$$

(2) نفرض $k\in R$ ونأخذ اي متجه $\vec{u}=(x,y)\in R^2$

$$T(k\vec{u})=T(kx,ky)$$
$$=(ky,kx+2ky,2kx-ky)$$
$$=k.T(\vec{u})$$

$\therefore$ T تحويل خطي

س/ بين فيما اذا كان T تحويل خطي من R^2 الى R^3 حيث ان $T:R^2\to R^3$

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+1\\y\\x+y\end{bmatrix}$$

تعريف: ليكن T تحويل $T: V \to W$ معرف بالشكل الآتي $T(\vec{V}) = \vec{0}$

لكل $v \in V$

يسمى هذا التحويل بالتحويل الصفري.

تعريف: التحويل $T: V \to W$ بحيث ان $T(\vec{V}) = \vec{V}$ لكل $v \in V$ يسمى بالتحويل الذاتي.

تعريف: التحويل $T: V \to W$ حيث ان $T(\vec{V}) = k\vec{V}$ لكل $k \in R$ ، $v \in V$

هو تحويل خطي يطلق عليه تمدد اذا كان $k > 1$ و انكماش اذا كان $0 < k < 1$

مبرهنة: اذا كان $L: V \to W$ تحويل خطي فان

$$L(c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + \dots + c_n\vec{x_n}) = c_1 L(\vec{x_1}) + c_2 L(\vec{x_2}) + \dots + c_n L(\vec{x_n})$$

لكل $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ ولكل الاعداد الحقيقية $c_1, c_2, \dots, c_n$

البرهان: نتبع اسلوب الاستقراء الرياضي

$$L(c_1\vec{x_1}) = c_1 L(\vec{x_1})$$

نفرض العلاقة صحيحة عندما $n = k$ اي ان

$$L(c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + \dots + c_k\vec{x_k}) = c_1 L(\vec{x_1}) + c_2 L(\vec{x_2}) + \dots + c_k L(\vec{x_k})$$

نبرهن ان العلاقة صحيحة عندما $n = k+1$

$$L(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{k+1} x_{k+1}) = L[(c_1 x_1 + \dots + c_k x_k) + c_{k+1} x_{k+1}]$$

لان L تحويل خطي بالفرض

$$= c_1 L(x_1) + c_2 L(x_2) + \dots + c_k L(x_k) + c_{k+1} L(x_{k+1})$$

∴ العلاقة صحيحة لكل n .

مبرهنة: ليكن $L: V \to W$ تحويل خطي فان

أ) $L(\vec{0_V}) = \vec{0_W}$ حيث $\vec{0_V}$ ، $\vec{0_W}$ متجهات صفرية لـ V, W

ب) على التعاكس

$$L(\vec{x} - \vec{y}) = L(\vec{x}) - L(\vec{y})$$

البرهان: أ-

$$\vec{0_V} = \vec{0_V} + \vec{0_V}$$

نأخذ التحويل لكلا الطرفين $L(\vec{0_V}) = L(\vec{0_V} + \vec{0_V})$

لان L تحويل خطي $\Rightarrow L(\vec{0_V}) = L(\vec{0_V}) + L(\vec{0_V})$

نطرح $L(\vec{0_V})$ من الطرفين ينتج

$$L(\vec{0_V}) = \vec{0_W}$$

$$L(\vec{x}-\vec{y}) = L(x+(-y))$$
$$= L(x) + L(-y)$$
$$= L(x) - L(y) \qquad \text{لان } L \text{ تحويل خطي}$$
$$\therefore L(\vec{x}-\vec{y}) = L(\vec{x}) - L(\vec{y}) \qquad \text{لكل عدد حقيقي } k \in R$$

(و.هـ.م)

مبرهنة: ليكن $L: V \to W$ تحويل خطي من فضاء متجهات V ذو بعد n وفضاء متجهات W وليكن $S=\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ قاعدة في V اذا كان $\vec{x}$ متجهاً في V فان $L(x)$ يحدد بصورة كاملة بدلالة $\{L(x_1), L(x_2), \dots, L(x_n)\}$

البرهان: $\because$ $\vec{x}$ في V فنستطيع كتابة

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$
$$L(x) = L(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$$
$$L(x) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2) + \dots + c_nL(x_n)$$

وهذا يعني ان $L(x)$ حددت بدلالة صور عناصر مجموعة القاعدة S اذا جزئنا S فقط تتغير الاعداد c_i .

(و.هـ.م)

تعريف: ليكن $L: V \to W$ تحويل خطي حيث كل من V, W فضاء متجهات نقول ان L تحويل خطي متباين $\Leftrightarrow$ $x_1 \neq x_2$ فان $L(x_1) \neq L(x_2)$ وكذلك اذا كان $L(x_1) = L(x_2)$ فان $x_1 = x_2$.

مثال: ليكن $L: R^2 \to R^2$ تحويل خطي بحيث ان $L\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\x-y\end{bmatrix}$

هل ان L تحويل متباين ام لا ؟

الحل:
$$L(\vec{x}_1) = L(\vec{x}_2) \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$$

نفرض انها متساويين
$$L(\vec{x}_1) = L\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_1-y_1\end{bmatrix}$$
$$L(\vec{x}_2) = L\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2+y_2\\x_2-y_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + \cancel{y_1} = x_2 + \cancel{y_2}$$
$$x_1 - \cancel{y_1} = x_2 - \cancel{y_2}$$
بالجمع
$$2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

نعوض عن $x_1 = x_2 \Leftarrow$

$$\cancel{x_1} + y_1 = \cancel{x_2} + y_2$$
$$y_1 = y_2$$

$\therefore$ L تحويل متباين

~~تعريف: اذا كان $L: V \to W$ تحويل خطي فان نواتها (Kernal) هي المجموعة الجزئية~~
من V المكونة من جميع المتجهات $\vec{X}$ بحيث ان
$L(\vec{X}) = \vec{0_W}$ وبعبارة اخرى
$$\ker(L) = \{\vec{X} \in V : L(\vec{X}) = \vec{0_W}\}$$

مثال: ليكن $L: R^4 \to R^2$ تحويل خطي معرف بالصيغة
$$L\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ z+w \end{bmatrix}$$
جد $\ker(L)$ ؟

الحل:
$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad L(\vec{X}) = 0$$
$$\Rightarrow L\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \Rightarrow y=-x \\ z+w=0 \Rightarrow w=-z \end{cases}$$
نجعل $x=r$ ، $z=s$

$\therefore$
$$\ker(L) = \begin{bmatrix} r \\ -r \\ s \\ -s \end{bmatrix}$$

مبرهنة: ليكن $L: V \to W$ تحويل خطي فان نواة L هي فضاء جزئي من V

البرهان:

ليكن $\vec{X}, \vec{Y} \in \ker(L)$
$$① \; L(\vec{X}+\vec{Y}) = L(\vec{X}) + L(\vec{Y})$$
$$= 0+0 = 0$$
$$\Rightarrow L(\vec{X}+\vec{Y}) = 0$$
$$\therefore \vec{X}+\vec{Y} \in \ker(L)$$
$$② \; L(c\vec{X}) = c\,L(\vec{X}) = c \cdot \vec{0} = 0 \; ; \; c \in R$$
$$\therefore L(c\vec{X}) = 0 \Rightarrow c\vec{X} \in \ker(L)$$
$\therefore$ $\ker(L)$ فضاء جزئي

(و.هـ.م)

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

تعريف :- لتكن A مصفوفة مربعة سعة $(n\times n)$ فيقال للعدد λ بأنه قيمة ذاتية لـ A اذا وجد متجه غير صفري $\vec{X}$ في R^n بحيث ان :

$$A\vec{X} = \lambda\vec{X}$$

قيمة ذاتية ، متجه ذاتي

ويطلق على $\vec{X}$ المتجه الذاتي لـ A او المتجه الذاتي المرافق لـ λ

مثال :- لتكن $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

وان $\vec{X}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

جد القيم الذاتية للمصفوفة A ؟

الحل

$$A\vec{X} = \lambda\vec{X}$$

$$A\vec{X} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

تعريف :- لتكن $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ مصفوفة مربعة تطلق على المعادلة $|\lambda I - A| = 0$ بالمعادلة المميزة ويطلق على الجذور الناتجة من هذه المعادلة بالجذور المميزة وهي كما يلي :

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

مثال :- جد القيم الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

الحل :- نوجد $\lambda I - A$

$$\Rightarrow \lambda I - A = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda-10 & 9 \\ -4 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-10 & 9 \\ -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4$$

~~مبرهنة : إذا كانت A مصفوفة سعة n×n فإن العبارات الآتية متكافئة :~~

1- λ قيمة ذاتية لـ A

2- لمنظومة المعادلات $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$ حلول غير تافهة

3- يوجد متجه غير صفري $\vec{x}$ في R^n بحيث $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

4- λ هو حل حقيقي للمعادلة المميزة $|\lambda I - A| = 0$.

ان المتجهات الذاتية $\vec{x}$ المرافقة للقيم الذاتية λ هي المتجهات غير الصفرية في فضاء حل $(\lambda I - A)\vec{x} = 0$ يطلق على فضاء الحل هذا الفضاء الذاتي لـ A المرافق لـ λ

مثال: جد قواعد الفضاءات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

المعادلة المميزة لـ A هي $(\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$

$\Leftarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 5$

ليكن $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي لـ A المرافق لـ λ

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ---(1)$$

عندما $\lambda_1 = 1 \Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{--- } 1 \quad \Rightarrow -2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0 \quad \text{--- } 2 \quad \therefore \Rightarrow x_1 = t, x_2 = t$$

$$-4x_3 = 0 \quad \text{--- } 3 \quad \Rightarrow x_3 = 0$$

$$\therefore \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

هذا يؤلف قاعدة للفضاء الذاتي المرافق لـ $\lambda_1 = 1$

عندما $\lambda_{2,3} = 5 \Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{--- } 1 \quad \Rightarrow 2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{--- } 2$$

نفرض $x_2 = s$

نفرض $x_3 = t$ $\qquad x_1 = -s$

$$\vec{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s\\s\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

∴ هذان المتجهان مستقلين فإنهما يؤلفان قاعدة للفضاء الذاتي المرافق لـ $\lambda=5$.

مثال/ جد قواعد الفضاءات الذاتية للمصفوفات الآتية.

1- $\begin{bmatrix}0 & 3\\4 & 0\end{bmatrix}$

2- $\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$