مثال: لتكن $f(x)=x^3-3x+2$ جد جذر المعادلة $f(x)=0$ ثم اذكر رتبة كل جذر.

الحل: احد الجذور هو (1) لان $f(1)=0$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+x-2 \\
\hline
x-1 & x^3-3x+2 \\
 & \mp x^3 \pm x^2 \\
\hline
 & x^2-3x+2 \\
 & \mp x^2 \pm x \\
\hline
 & -2x+2 \\
 & \pm 2x \mp 2 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

$f(x)=x^3-3x+2$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\alpha=1$

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x=1$

$x=-2$

الجذور هي $1, 1, -2$

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$f''(x)=6x$

$f(1)=0$

$f'(1)=0$

$f''(1)=6\neq 0$

$m=2$ عليه الجذر (1) رتبته $m=2$ وهو جذر مكرر

الان نجد رتبة الجذر $\alpha=-2$

$f(-2)=0$

$f'(2)=9\neq 0$

عليه رتبة الجذر -2 هي $m=1$ وهو جذر بسيط.

مثال: جد باستخدام طريقة النقطة الواحدة جذر المعادلة

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

اذا علمت ان $x_0 = 4$ و $\epsilon = 10^{-4}$

الحل: اولاً نوجد الجذور الحقيقية

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$x = -1$$

الحالة الاولى

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x^2 = 2x + 3$$

$$\boxed{x = \sqrt{2x+3} = g_1(x)}$$

$$g_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

$$g_1'(4) = \frac{1}{3.3166} < 1$$

$\therefore$ $g_1(x)$ تحقق

if $x_0 = 4$

$$x_1 = \sqrt{2x_0+3} = \sqrt{2(4)+3} = 3.3166$$

$$|x_1 - x_0| = |0.6834| \nless \epsilon = 10^{-4}$$

$$x_2 = g_1(x_1) = \sqrt{2x_1+3} = \sqrt{2(3.3166)+3}$$

$$= 3.1037$$

$$x_3 = g_1(x_2) = 3.0344$$

$$x_4 = g_1(x_3) = 3.01144$$

$$x_5 = g_1(x_4) = 3.0038$$

نستمر الى ان نصل الى الجذر 3

الحالة الثانية

$$x^2-2x-3=0$$
$$x^2-2x=3$$
$$x(x-2)=3$$

$$x=\frac{3}{x-2}=g_2(x)$$

$$g_2'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$|g_2'(4)|=\left|\frac{-3}{(4-2)^2}\right|=\frac{3}{4}<1$$ تحقق

$$x_1=g_2(x_0)=\frac{3}{x_0-2}$$
$$x_1=\frac{3}{4-2}=1.5$$
$$x_2=g_2(x_1)=\frac{3}{1.5-2}=-6$$
$$x_3=g_2(x_2)=\frac{3}{-6-2}=-0.375$$
$$x_4=-1.2632$$
$$x_5=-0.9193$$
$$x_6=-1.028$$
$$x_7=-0.991$$

نلاحظ ان هذه القيم تقترب من الجذر (-1) وبشكل متذبذب.

الحالة الثالثة :

$$x^2-2x-3=0$$

$$2x=x^2-3$$

$$x=\frac{x^2-3}{2}=g_3(x)\Rightarrow g_3'(x)=2x$$

$$g_3'(4)=8>1$$ لا تحقق

$$x_0=4$$

$$x_1=g_3(x_0)=\frac{x_1^2-3}{2}$$

$$x_1=g_3(x_0)=\frac{4^2-3}{2}=6.5$$

$$x_2=g_3(x_1)=19.625$$

$$x_3=191.0703$$

نلاحظ تباعد هذه الدالة وذلك لعدم تحققها الشرط وهو شرط التقارب.

الحلول العددية لمنظومة المعادلات اللاخطية

يمكن ايجاد الجذور الحقيقية لمنظومة المعادلات غير الخطية لاكثر من متغير وذلك بتعميم بعض الطرق السابقة لايجاد جذر المعادلة:

١- النقاط الصامدة لدوال متعددة المتغيرات

الشكل العام للنظام اللاخطي الذي يتكون من m من المعادلات اللاخطية يكون:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

or

$$F(x) = 0$$

حيث ان $F : R^n \to R^n$ وان $f : R^n \to R^n$

امثلة عامة

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin 3x_2 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{10} = 0$$

مبرهنة: لتكن $D = \{(x_1, x_2, \dots x_n)^T = X\}$ نفرض ان $G : D \subset R^n \to R^n$ دالة مستمرة ولها مشتقات جزئية اولى ومستمرة وان $G(X) \in D$ لكل $X \in D$ عندئذٍ G لها نقطة صامدة في D.

كذلك اذا وجدنا ثابت $k < 1$ بحيث أن:

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{k}{n}$$

لكل قيم $X \in D$ وان $j = 1, 2, \dots, n$; i

فأن المتتابعة $\{X^{(n)}\}_{x=0}^{\infty}$ المعرفة بالصيغة التكرارية

$X^{(n)} = G(X^{(n-1)})$ لقيم $n \geq 1$ تتقارب الى نقطة صامدة وحيدة $\alpha \in D$ وان

$$\| X^{(n)} - \alpha \|_\infty \leq \frac{k^n}{1-k} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_\infty$$

ملاحظة: اذا كان لدينا نظام لاخطي متكون من معادلتين مجهولتين فأن:

١- الشرط الكافي لتقارب النقطة الصامدة المعممة هو

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right| < 1$$

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| < 1$$

لكافة قيم (x_1, x_2) الواقعة في جوار النقطة $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

٢- اذا كانت

$$L = \max\left\{ \left|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right| , \left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right| \right\}$$

وكانت $1 > L > 0$ فأن هناك تقارب لسلسلة القيم التقريبية اي كلما كانت قيمة L قريبة الى (1) ~~...~~ وكلما كان التقارب بطيء وكلما كانت (L) قريبة الى (0) يكون التقارب اسرع.

ملاحظة:

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

مثال: استخدم طريقة النقطة الصامدة لايجاد حل منظومة المعادلات:

$$f_1(x,y) = x + 3\log_{10} x - y^2 = 0 \quad ---(1)$$

$$f_2(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \quad --(2)$$

وبأخذ $(3.5, 2.5) = (x^{(0)}, y^{(0)})$ وبدقة $\epsilon = 10^{-3}$

الحل:

نكتب الصيغة $X = G(X)$ من النظام المعطى حيث $X = (x, y)$

من المعادلة (1) نحصل على

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$

$$x = y^2 - 3\log_{10} x = g_1(x, y)$$

من المعادلة (٢) نحصل على

$$xy = 2x^2 - 5x + 1$$

$$y = 2x - 5 + \frac{1}{x} = g_2(x, y)$$

ونأخذ $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (3.5, 2.5)$

$$x^{(1)} = (y^{(0)})^2 - 3\log_{10} x^{(0)} = g_1(x^{(0)}, y^{(0)})$$

$$y^{(1)} = 2x^{(0)} - 5 + \frac{1}{x^{(0)}} = g_2(x^{(0)}, y^{(0)})$$

$$x^{(1)} = (2.5)^2 - 3\log_{10}(3.5) = 4.618$$

$$y^{(1)} = 2(3.5) - 5 + \frac{1}{3.5} = 2.286$$

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (4.618, 2.286)$$

$$\vdots$$

خوارزمية النقطة الصامدة للنظام غير الخطي الذي يتكون من معادلتين مجهولتين.

الادخال: الدوال $g(x,y)$ و $g_2(x,y)$
ϵ ، x_0, y_0.

خطوة (1): ضع $i=1$

خطوة (2): نحسب $x=g_1(x_0,y_0)$ ، $y=g_2(x_0,y_0)$.

خطوة (3): نحسب $D_1=|x-x_0|$ ، $D_2=|y-y_0|$

خطوة (4): اذا كانت $\min\{D_1,D_2\}<\epsilon$ اطبع x,y الجذرين اي هما النقطتين الصامدتين وتوقف.

خطوة (5): والا ضع $x_0=x$ ، $y_0=y$.

خطوة (6): ضع $i=i+1$ واذهب الى الخطوة (2)

٢- طريقة نيوتن رافسون لحل نظام المعادلات اللاخطية

يمكن تعميم طريقة نيوتن رافسون المستخدمة سابقاً لكي تطبق على الحالة الجديدة لدينا

$$F(X)=0$$

يمكن اعادة صياغة النظام اعلاه بالشكل التالي

$$G(X)=X-[J(X)]^{-1}F(X)$$

حيث

$$J(X)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة جاكوبي وباستخدام الاسلوب التكراري:

$$X^{(n)} = G(X^{(n-1)}) = X^{(n-1)} - \left[J(X^{(n-1)})\right]^{-1} F(X^{(n-1)})$$

لقيم $n \geq 1$ وأن $X^{(0)}$ متجه الحل الابتدائي.

ان ضعف هذا الاسلوب يكمن في ايجاد معكوس مصفوفة جاكوبي في كل خطوة تكرارية.

اذا كان النظام الاتي لدينا يتكون من معادلتين بمجهولين

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad ---(1)$$

نجد سلسلة من القيم $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب كحل للمنظومة ويتم الحصول على كل عنصر من عناصر هذه السلسلة عن طريق تحسين القيمة السابقة لها باستخدام العلاقتين

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i \\ y_{i+1} &= y_i + k_i \end{aligned}\right\} \quad ---(2)$$

حيث h_i, k_i قيمتان تحققان المعادلتين التاليتين عند النقطة (x_i, y_i)

$$\left.\begin{aligned} h_i f_x + k_i f_y &= -f \\ h_i g_x + k_i g_y &= -g \end{aligned}\right\} \quad --(3)$$

حيث $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ و $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ ، $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$ ، $g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$

بعد ايجاد قيم الدالتين f و g ومشتقاتها الجزئية عند النقطة (x_i, y_i) سوف تتحول معادلة (3) الى معادلتين خطيتين ولكي نجد حل هاتين المعادلتين بمجهولين h_i و k_i يتوجب ان تكون قيمة المحدد التالي عند النقطة (x_i, y_i) لا يساوي صفر

$$|J| = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad ---(4)$$

اذا تحقق هذا الشرط فان قيمة h_i و k_i هي

$$h_i = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{|J|} \quad , \quad k_i = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{|J|} \quad --(5)$$

وبتعويض (5) في المعادلة (2) نحصل على تقريب جديد لـ x و y وبالتكرار نحصل على سلسلة من القيم التقريبية .

خوارزمية طريقة نيوتن - رافسون للمعادلات اللاخطية ذات المجهولين.

الادخال: $f(x,y)$ ، $g(x,y)$ ، (x_0,y_0) ، ϵ.

خطوة (1): احسب قيمة المحدد $|J|$ عند النقطة (x_0,y_0)

خطوة (2): اذا كانت $|J| \neq 0$ انتقل الى الخطوة (4)

خطوة (3): اذا كانت $|J| = 0$ فان الطريقة فاشلة

خطوة (4): احسب قيمة h و k كما يلي

$$h = (g\, f_y - f\, g_y) / |J|$$

$$k = (f\, g_x - g\, f_x) / |J|$$

خطوة (5): احسب القيم الجديدة

$$x_1 = x_0 + h$$
$$y_1 = y_0 + k$$

خطوة (6): احسب الفرق بين اخر قيمتين.

$$D_1 = |h| \quad , \quad D_2 = |k|$$

خطوة (7): اذا كانت $\min\{D_1, D_2\} < \epsilon$
اطبع قيم المتغيرات x_1 ، y_1

خطوة (8): والا ضع $x_0 = x_1$ ، $y_0 = y_1$ وارجع الى الخطوة (1).

مثال: استخدم طريقة نيوتن - رافسون لايجاد الجذور التقريبية في المثال السابق:

$$f(x,y) = x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$
$$g(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$$

$$(x_0, y_0) = (3.5, 2.5)$$

الحل:

$$f(x_0, y_0) = 3.5 + 3\log_{10}(3.5) - (2.5)^2$$
$$= -1.1178$$

$$g(x_0, y_0) = 2(3.5)^2 - (3.5)(2.5) - 5(3.5) + 1$$
$$= -0.75$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{3}{x \ln 10} - 0 = 1.3723$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 0 - 2y = -5$$

$$g_x = 4x - y - 5 = 6.5$$

$$g_y = -x = -3.5$$

$$\boxed{i=0}$$

$$1.3723 h_i - 5 k_i = 1.1175$$
$$6.5 h_i - 3.5 k_i = 0.75$$

3

$$J = \begin{vmatrix} 1.3723 & -5 \\ 6.5 & -3.5 \end{vmatrix} = 27.697 \neq 0$$

$$h_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1.1175 & -5 \\ 0.75 & -3.5 \end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{+0.1623}{27.697} = 0.00586$$

$$k_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1.3723 & 1.1175 \\ 6.5 & 0.75 \end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{-6.2365}{27.697} = -0.22517$$

$x_1 = x_0 + h_0 = 3.5 - 0.00586 = 3.49414$

$y_1 = y_0 + k_0 = 2.5 - 0.22517 = 2.27483$

$(x_1, y_1) = (3.49414, 2.27483)$

$X_2 = X_1 + h_1$

$Y_2 = X_2 + k_1$

الحلول العددية للنظام الخطي $Ax=b$

ليكن لدينا النظام الخطي الآتي $Ax=b \ldots (1)$ حيث
$A\in R^{n\times n}$ ، $X\in R^{n}$ ، $b\in R^{n}$

وأن

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad و \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

لإيجاد الحل التقريبي (العددي) أي المتجه X وسيتم توضيح ذلك في الخطوات التالية:

1- عند $n>m$ (m عدد المعادلات، n عدد المجاهيل) فإن النظام الخطي (1) له عدد غير منتهٍ من الحلول.

مثال:

$$2x_1-3x_2=2$$
$$n=2,\ m=1$$

عليه بوضع اي متجه لـ x_1 نحصل على متجه لـ x_2 وعليه فالنظام له لانهاية من الحلول.

2- عندما $n<m$ في هذه الحالة لا يكون للنظام الخطي (1) حل

أ- متوائم (منسق) له حل وتحقق المعادلات.

ب- غير متوائم (غير منسق) له حل ولكن لا يحقق جميع المعادلات.

مثال:

$$x_1 + 2x_2 = 1 \quad \dots (1)$$
$$x_1 + 3x_2 = 2 \quad \dots (2)$$
$$x_1 + 2x_2 = 3 \quad \dots (3)$$

$n<m \Leftarrow \quad n=2 \;،\; m=3$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -x_1 \mp 3x_2 &= 2 \\ \hline -x_2 &= -1 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

لا يحقق المعادلة (3) اذاً النظام غير متوائم (غير منسق).

مثال:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \dots (1)$$
$$2x_1 - 3x_2 = 1 \quad \dots (2)$$
$$3x_1 - 2x_2 = 1 \quad (3)$$

$m = 3 \;،\; n = 2 \Leftarrow m > n$

$$x_1 = \frac{1}{5} \;,\; x_2 = \frac{-1}{5}$$

x_1, x_2 تحقق جميع المعادلات : النظام متوائم (منسق).

٣- عندما $n = m$ فأن النظام الخطي (1) له حل وحيد.

مثال:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \\ \hline x_1 = -1 \;&,\; x_2 = 1 \end{aligned}$$

هذه الحالة سوف تقتصر عليها دراستنا في هذه المواضيع عندئذٍ يكون النظام بالشكل التالي

$$Ax = b \quad \text{---} \quad (2)$$

حيث ان

$$b, x \in R^n \quad , \quad A \in R^{n \times n}$$

سنفرض عند دراسة النظام (2) بأن المصفوفة A هي مصفوفة غير شاذة (غير منفردة) (non singular) عندئذ تكون العبارات التالية متكافئة :-

١- النظام الخطي للمتجانس $Ax = 0$ يكون له حل وحيد هو الحل الصفري $x = 0$.

٢- لأي متجه $b \in R^n$ فأن النظام الخطي (2) له حل وحيد.

٣- $|A| \neq 0$ وعليه المصفوفة A قابلة للانعكاس.

تنقسم الطرق العددية لحل النظام الخطي الى قسمين.

١- الطرق المباشرة :- تلك الطرق التي يتم فيها ايجاد سلسلة من العمليات الحسابية مرة واحدة ثم الوصول الى قيمة تقريبية للحل المطلوب.

٢- الطرق التكرارية (غير المباشرة) :- تلك الطرق التي تصل الى الحل المضبوط من طريقة حساب تقريبات متعاقبة لها أي نبدأ على تقريب ثم يجري سلسلة من العمليات الحسابية التي تؤدي الى الحصول على حل تقريبي افضل وهذا بدوره يستخدم مرة اخرى لكي ينتج حلا اكثر دقة وهكذا بالتكرار.

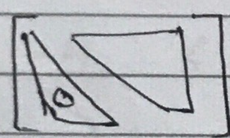
أولاً: الطرق المباشرة Direct Methods

1- طريقة كاوس للحذف

Gauss Elimination Method.

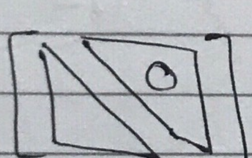
تتلخص هذه الطريقة لحل النظام (2) فيما يلي:

أ- تحويل المصفوفة A الى مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى والذي يسمى بالحذف الأمامي أو الخلفي.



مثلثية عليا

حذف امامي



مثلثية سفلى

وحسب الصيغة

$$New\ Row_i = Row_i - \frac{(a_{ij})}{(a_{jj})} Row_j$$

ب- حل النظام المثلثي الناتج اما بالتعويض الخلفي (أو الامامي).

مثال: جد الحل للمنظومة التالية للمعادلات الخطية باستخدام طريقة حذف كاوس.

$$4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 3x_2 = 4$$

الحل:

نرتب المنظومة بشكل $[A:b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

تحول الى اصفار

أولاً: نجري الحذف الامامي

السطر الجديد

$$\text{New Row}_2 = \text{Row}_2 - \left(\frac{2}{4}\right)\text{Row}_1$$

$$= [2 \quad -4 \quad 6 \mid 3] - \left(\frac{2}{4}\right)[4 \quad -9 \quad 2 \mid 5]$$

$$\text{New Row}_2 = [2 \quad -4 \quad 6 \mid 3] - [2 \quad -4.5 \quad 1 \mid 2.5]$$

$$\text{New Row}_2 = [0 \quad 0.5 \quad 5 \mid 0.5]$$

$$\text{New Row}_3 = \text{Row}_3 - \left(\frac{1}{4}\right)\text{Row}_1$$

$$= [1 \quad -1 \quad 3 \mid 4] - \left(\frac{1}{4}\right)[4 \quad -9 \quad 2 \mid 5]$$

$$= [1 \quad -1 \quad 3 \mid 4] - [1 \quad -\frac{9}{4} \quad \frac{1}{2} \mid \frac{5}{4}]$$

$$\text{New Row}_3 = [0 \quad 1.25 \quad 2.5 \mid 2.75]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} *4 & -9 & 2 & 5 \\ 0 & 0.5 & 5 & 0.5 \\ 0 & 1.25 & 2.75 & 2.75 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{Row1} \\ \text{Row2} \\ \text{Row3} \end{array}$$

$$\text{NewRow3} = \text{Row3} - \left(\frac{1.25}{0.5}\right)\text{Row2}$$

$$= [0 \quad 1.25 \quad 2.75 \mid 2.75] - \left(\frac{1.25}{0.5}\right)[0 \quad 0.5 \quad 5 \mid 0.5]$$

$$\text{NewRow3} = [0 \quad 0 \quad -10 \mid 1.5]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} *4 & -9 & 2 & 5 \\ 0 & 0.5 & 5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -10 & 1.5 \end{array}\right]$$

ثانياً: نجري التعويض التراجعي (الخلفي)

$$-10X_3 = 1.5 \Rightarrow X_3 = -0.15$$

$$0.5X_2 + 5X_3 = 0.5 \Rightarrow X_2 = \frac{0.5 - 5(0.15)}{0.5}$$

$$X_2 = 2.5$$

$$X_1 = \frac{5 + 9(2.5) - 2(-0.15)}{4}$$

$$X_1 = 6.95$$

ضرب
Note: اذا جاء (جد المحدد) فنوجد حاصل جمع عناصر القطر الرئيسي لأعرض موقعه الحدود.

$$|A| = 4 + 0.5 + 7 - 10 = -5.5$$

خوارزمية طريقة كاوس للحذف

لحل نظام متكون من n المعادلات الخطية و n من المجاهيل

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}$$

الادخال: n عدد المجاهيل والمعادلات، المصفوفة $A=(a_{ij})$: $1 \le i \le n$ ، $1 \le j \le n+1$

خطوة (1): لكل $i = 1, 2, \dots, n-1$ اذا كان $a_{ii} = 0$ توقف ولا يوجد حل وحيد.

خطوة (2): ضع $j = i+1, \dots, n$ نفذ الخطوات 3-4

خطوة (3): ضع

$$m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$$

خطوة (4): احسب لقيم $k = 1, 2, \dots, n+1$

$$a_{jk} = a_{jk} - m_{ji} * a_{ik}$$

خطوة (5): اذا كان $a_{nn} = 0$ فاطبع لا يوجد حل وحيد وتوقف

خطوة (6): ضع $x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$

خطوة (7): لكل

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} * x_j}{a_{ii}}$$

خطوة (8): اطبع قيم المجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_n$ وتوقف.

(٧٠)

اساليب تحسين الحلول

١. التمركز (pivoting)

يعتبر التمركز الوسيلة التي يمكن بواسطتها التجنب القسمة على الصفر وتقليل تأثير اخطاء التدوير وذلك بتبديل ترتيب المعادلات اي بالبحث عن اكبر قيمة مطلقة لمعامل المجهول الذي يراد حذفه من العمود الواقع تحت القطر الرئيسي وتبديل الاسطر بحيث تحل تلك القيمة وهي العنصر المحوري (pivot element) وتدعى هذه العملية بالتمركز الجزئي (partial pivoting).

اما عملية اجراء التبديل اللازم في الصفوف والاعمدة للحصول على اكبر عنصر محوري تدعى بالتمركز الكلي ومثل هذه العملية نادراً ما تستعمل لان تبديل الاعمدة يؤدي الى تغيير مواقع المجاهيل $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

٢. التدريج (scaling)

هو عملية اجراء تعديل معاملات مجموعة المعادلات الخطية وجعل قيمها غير متفاوتة ويتم بقسمة كل سطر على اكبر قيمة مطلقة لمعاملاته ثم تستخدم الحذف لكاوس مع التمركز الجزئي.

مثال: استخدم طريقة كاوس للحذف مع التمركز الجزئي لايجاد حل النظام الخطي:

$$2x_2 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_4 = -7$$
$$6x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 6$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

نبدل السطر الاخير بالأول لانه يحتوي على اكبر قيمة مطلقة للعنصر الأول.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

كاوس للحذف

$$Row_2 = R_2 - \left(\frac{2}{6}\right) R_1$$

$$Row_3 = R_3 - \left(\frac{4}{6}\right) R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 0.3333 & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

نقوم تبديل عناصر السطر الثاني بدل الثالث

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 0.3333 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$Row_3 = R_3 - \left(\frac{1.6667}{-3.6667}\right) R_2$$

$$Row_4 = R_4 - \left(\frac{2}{-3.6667}\right) R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & 3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & -0.7273 & -9.000055 \\ 0 & 0 & 2.1818 & -0.27269 & -5.9999 \end{array}\right]$$

$$Row_4 = Row_4 - \left(\frac{2.1818}{6.8182}\right) R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & -0.7273 & -9.000055 \\ 0 & 0 & 0 & -0.039957 & -3.1199 \end{array}\right]$$

$$X_4 = \frac{-3.1199}{-0.039957} = 78.08144$$

$$X_3 = \frac{-9.000055 + 0.7273(78.08144)}{6.8182}$$

$$X_3 = 7.008973$$

$$X_2 = \frac{-11 - 4(7.008973) + 2.3333(78.08144)}{-3.6667}$$

$$X_2 = -39.04097$$

$$X_1 = \frac{6 - 1(-39.04097) + 6(7.008973) - 5(78.0844)}{6}$$

$$X_1 = -50.5521$$

H.W

جد قيم x_1, x_2, x_3 للنظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أ- باستخدام طريقة كاوس للحذف مع التركيز الجزئي.

ب- باستخدام التدرج.

ملاحظة: عدد العمليات الحسابية لطريقة حذف كاوس يكون تقريبًا مساويًا $\left(\frac{n^3}{3}\right)$ حيث n عدد الجاهيل أو بعد المصفوفة.
والتعويض مشابه بالشكل

١- عمليات الضرب والقسمة

$$\frac{n^3+3n^2-n}{3}$$

٢- عمليات الجمع والطرح

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

ايضًا عدد الخطوات في طريقة كاوس للحذف $(n-1)$ لأننا نصفر فقط اسفل القطر الرئيسي.

Note عدد الاصفار في المصفوفة المثلثية العليا في طريقة كاوس للحذف هي

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

or

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

طريقة كاوس جوردان

Gauss Jordan Elimination

هذه الطريقة هي تعديل لطريقة كاوس للحذف حيث نقوم بإجراء عملية الحذف للمتغير من كل المعادلات التي تقع فوق القطر بالإضافة إلى المعادلات التي تقع أسفل القطر.

ومن هذه الحالة نحصل على مصفوفة قطرية لذا لا نحتاج إلى عملية التعويض الخلفي كما هو الحال في طريقة كاوس للحذف.

مثال: جد الحل لمنظومة المعادلات باستخدام كاوس جوردان

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

الحل:

$$\text{New}R_1 = R_1/4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{2} & 5/4 \\ 2 & -4 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\text{new}R_2 = R_2 - \left(\frac{2}{1}\right) R_1$$

$$\text{New}R_3 = R_3 - \left(\frac{1}{1}\right) R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -9/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0.5 & 5 & 0.5 \\ 0 & 1.25 & 2.5 & 2.75 \end{array}\right]$$

$\text{New } R_2 = R_2 / 0.5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -9/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1.25 & 2.5 & 2.75 \end{array}\right]$$

$\text{New } R_3 = R_3 - \left(\frac{1.25}{1}\right) R_2$

$\text{New } R_1 = R_1 - \left(\frac{-9/4}{1}\right) R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 23 & 3.5 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 1.5 \end{array}\right]$$

$\text{New } R_3 = R_3 / -10$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 23 & 3.5 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.15 \end{array}\right]$$

$(\checkmark\checkmark)$

$$New\ R_2 = R_2 - \left(\frac{10}{1}\right) R_3$$

$$New\ R_1 = R_1 - \left(\frac{23}{1}\right) R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6.95 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.15 \end{array}\right]$$

$$X_1 = 6.95$$

$$X_2 = 2.5$$

$$X_3 = -0.15$$

للاطلاع

خوارزمية طريقة كاوس - جوردان

الادخال: عناصر المصفوفة (A) و n

خطوة (1): لكل قيم $k=1,2,\ldots,n$

ضع $j=k,k+1,\ldots,n$

واحسب $a(k,j) = a(k,j) / a(k,k)$

خطوة (2): لكل $i=1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n$ بحيث $i \neq k$

ضع $j=k,k+1,\ldots,n+1$

واحسب $a(i,j) = a(i,j) - a(i,k) * a(k,j)$

خطوة (3): جد قيم المجاهيل مباشرة حسب

$X_i = a(i,n+1)$, $i=1,2,\ldots,n$

ملاحظات :

١- عدد العمليات الحسابية في طريقة حل النظام الخطي يكون تقريباً ($\frac{n^3}{2}$) .

أ- منها عمليتي الضرب والقسمة $\frac{n^3}{2}+n^2-\frac{n}{2}$

ب- عمليتي الجمع والطرح $\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}$

وعليه طريقة كاوس للحذف افضل من عملية كاوس جوردان لان عدد العمليات فيها اقل من عدد عمليات طريقة كاوس جوردان $\frac{n^3}{3}<\frac{n^3}{2}$

٢- طريقة كاوس - جوردان تتطلب n من الخطوات لتحويل مصفوفة النظام الى مصفوفة قطرية .

٣- تستخدم طريقة كاوس - جوردان لايجاد معكوس المصفوفة A اي ان ،

$$[A : I] \rightarrow [I : A^{-1}]$$

٢- الطرق الغير مباشرة (الطرق التكرارية)

Iterative Methods

ليكن لدينا النظام الخطي $Ax = b$ اي أن

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

ولتكن $a_{ii} \neq 0$ لكل قيم i

وفي حالة وجود $a_{ii} = 0$ لبعض قيم i نبدل المعادلات اي ان نحصل على قدر المستطاع مصفوفة تحقق شرط السيطرة قطرياً اي ان

$i = 1, 2, \ldots, n$ و $\left(|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right)$

عليه يمكن كتابة النظام الخطي السابق بالشكل الاتي:

$$x_1 = [b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)]/a_{11}$$
$$x_2 = [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)]\, a_{22}$$
$$\vdots$$
$$x_n = [b_n - (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1})]/a_{nn}$$

وبصورة عامة فأن النظام الاخير يكتب:

$$x_i = \Big[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j\Big]/a_{ii} \quad \text{---}(1)$$

٢)

١- طريقة جاكوبي (Jacobi's Method)

تتلخص هذه الطريقة بفرض قيم اولية للمجاهيل (اي متجه ابتدائي للحل) ولتكن

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

وبوضع العلاقة ① بالشكل الاتي

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{ii}$$

لكل قيم $i = 1, 2, \ldots, n$

ويتكرار العملية اعلاه k من المرات $k = 0, 1, 2, \ldots$ الى ان نحصل على الدقة المطلوبة والتي تحقق الشرط الاتي

$$\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \| < \epsilon$$

حيث ϵ عدد صغير يمثل دقة الحل .

أو الصيغة

$$\frac{\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \|}{\| X^{(k)} \|} < \epsilon$$

مثال: استخدم طريقة جاكوبي لحل النظام الخطي

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 = 11$$
$$2X_1 + X_2 + 4X_3 = 16$$
$$-X_1 + 2X_2 \quad = 3$$

الحل:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \; i = 1, 2, \dots, n$$

بما أن $a_{33}=0$ عليه نبدل المعادلتين الثانية مع الثالثة

$$4X_1 + 2X_2 + X_3 = 11$$
$$-X_1 + 2X_2 \quad = 3$$
$$2X_1 + X_2 + 4X_3 = 16$$

$$X_1 = [11 - 2X_2 - X_3]/4$$
$$X_2 = [3 + X_1]/2$$
$$X_3 = [16 - 2X_1 - X_2]/4$$

ونأخذ $X^{(0)} = (1,1,1)$

$$X_1^{(k+1)} = [11 - 2X_2^{(k)} - X_3^{(k)}]/4$$

$$X_2^{(k+1)} = [3 + X_1^{(k)}]/2$$

$$X_3^{(k+1)} = [16 - 2X_1^{(k)} - X_2^{(k)}]/4$$

$\boxed{k=0}$

$$x_1^{(1)} = [11 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}]/4$$

$$= [11 - (2)(1) - (1)]/4 = \frac{8}{4}$$

$$x_1^{(1)} = 2$$

$$x_2^{(1)} = [3 + x_1^{(0)}]/2$$

$$= [3 + 1]/2 = \frac{4}{2}$$

$$x_2^{(1)} = 2$$

$$x_3^{(1)} = [16 - 2(1) - (1)]/4 = \frac{13}{4}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{13}{4}$$

$$x^{(1)} = (2, 2, \frac{13}{4})$$

$$\| x^{(1)} - x^{(0)} \| \not< \epsilon = 10^{-16}$$

$\boxed{k=1}$

$$x_1^{(2)} = [11 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(1)}]/4$$

$$= [11 - 2(2) - \frac{13}{4}]/4 = 15/16$$

$$x_1^{(2)} = \frac{15}{16}$$

$$x_2^{(2)} = [3 + x_1^{(1)}]/2$$

$$x_2^{(2)} = [3+2]/2 = 5/2$$

$$x_2^{(2)} = \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(2)} = [16 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}]/4$$

$$= [16 - 2(2) - 2]/4$$

$$x_3^{(2)} = \frac{5}{2}$$

$$x^{2} = \left(\frac{15}{16}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \epsilon = 10^{-6}$$

خوارزمية طريقة جاكوبي

الإدخال: n عدد المعادلات ، a_{ij} لكل $1 \le i, j \le n$ ،
b_i لكل $1 \le i \le n$ ، X_{oi} لكل $1 \le i \le n$ (الحل الابتدائي)
ϵ دقة الحل ، N عدد التكرارات.

خطوة (1): ضع $k = 1$
خطوة (2): اذا كانت $k \le N$ نفذ الخطوات (3-6).
خطوة (3): لقيم $i = 1, 2, \dots, n$ ضع

$$X_i = \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} X_{oj} \right] / a_{ii}$$

خطوة (4): اذا كانت $\| X - X_0 \| \le \epsilon$ عندئذ $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ تمثل الحل المطلوب وتوقف.
خطوة (5): ضع $k = k + 1$
خطوة (6) لقيم $i = 1, 2, \dots, n$ ضع $X_0 = X_i$
كرر الخطوة (2) حتى تحقق الخطوة (4) ثم توقف.

Invers Inteppolation الاندراج العكسي

لتكن $(X_i, y_i = f(X_i))$ حيث $i = 0, 1, \dots, n$ مجموعة من النقاط المعطاة. اذا كانت المطلوب ايجاد قيمة (X^*) التي تقابل قيمة (y) غير معطاة في الجدول $y \ne y_i \; \forall i$ فان هذه المسألة تسمى بالاندراج العكسي.

ان اسلوب الحل يكمن في تطبيق صيغة لاكرانج مع ابدال X, y مكان بعضهما البعض اي نعتبر y متغير مستقل و X متغير معتمد اي ان

$$y = f(x) \Rightarrow x = G(y)$$

خوارزمية طريقة لاكرانج

الادخال: x_i , $y_i = f(x_i)$ لكل قيم $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$
عدد البيانات n ، x^* القيمة المطلوب تقدير متجه الدالة عندها.

خطوة (1): احسب

$$L_i(x^*) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

خطوة (2): احسب

$$p(x^*) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) L_i(x^*)$$

واطبع $p(x^*)$ وتوقف.

مثال: لتكن $f(x)$ معرفة بقيم الجدول الاتي

x	1	3	4	6
$y=f(x)$	2	10	15	8

1) جد قيمة x^* عندما $y=12$

الحل: نضع الجدول

	y_0	y_1	y_2	y_3
y	2	10	15	8
$G(y)$ x	1	3	4	6

∵ عدد النقاط (البيانات) 4 نقاط
∴ افضل حدودية (بصيغة لاكرانج) تكون من الدرجة 3

$$P_3(y) = \sum_{i=0}^{3} G(y_i) L_i(y)$$

$$P_3(n) = G(y_0)L_0(y) + G(y_1)L_1(y) + G(y_2)L_2(y) + G(y_3)L_3(y)$$

$$L_i(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{y - y_j}{y_i - y_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$L_0(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{3} \frac{y - y_j}{y_0 - y_j}$$

$$= \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}$$

$$= \frac{(y-10)(y-15)(y-8)}{(2-10)(2-15)(2-8)}$$

$$L_0(y) = \frac{1}{624}(y-10)(y-15)(y-8)$$

$$L_0(12) = \frac{1}{624}(12-10)(12-15)(12-8)$$

$$= \frac{24}{624}$$

$$L_1(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{3} \frac{y - y_j}{y_1 - y_j}$$

$$L_1(y) = \frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}$$

$$= \frac{(y-2)(y-15)(y-8)}{(10-2)(10-15)(10-8)}$$

$$L_1(y) = \frac{-1}{80}(y-2)(y-15)(y-8)$$

$$L_1(12) = \frac{-1}{80}(12-2)(12-15)(12-8)$$

$$L_1(12) = \frac{120}{80}$$

$$L_2(12) = \frac{80}{455}$$

$$L_3(12) = \frac{-60}{84}$$

$$x^* = G(12) \cong P_3(12)$$

$$= G(2)L_0(12) + G(10)L_1(12) + G(15)L_2(12)$$

$$+ G(8)L_3(12)$$

$$= 1\left(\frac{24}{624}\right) + 3\left(\frac{120}{80}\right) + 4\left(\frac{80}{455}\right) + 6\left(\frac{-60}{84}\right)$$

$$x^* = 0,956044$$

(ΛΛ)

ملاحظة: يمكن اختيار مسألة ايجاد الجذر X^* للمعادلة $f(x)=0$ لطريقة نيوتن وامثوت تطبيقاً على الاندراج العكسي.

H.W من قاعدة المعلومات الاتية جد قيمة X^* لجذر المعادلة $f(x)=0$ (او صفر الدالة).

X	0.2	0.3	0.5
$y=f(x)$	0.4	-0.1	-0.45

ملاحظة:

1- مقدار الخطأ الناتج من صيغة للاندراج

$$|E_n^{(x)}| = |f(x) - P_n(x)| = \left| \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \frac{f^{n+1}(\lambda)}{(n+1)!} \right|$$

حيث $\lambda \in [a,b]$

$$= \left| (x-x_0)(x-x_1) \ldots\ldots (x-x_n) \frac{f^{n+1}(\lambda)}{(n+1)!} \right|$$

واذا كان $|f^{n+1}(x)| \leq M \in R^+$ فان

$$E_n(x) \leq \left| \frac{\prod_{i=0}^{n} (x-x_i)}{(n+1)!} \right| M$$

2- كثرة العمليات الحسابية خصوصاً عندما نتعامل مع المسائل الكبيرة حيث نحتاج الى $(3n+1)$ من عمليات الضرب والقسمة و $(2n+1)$ من عمليات الجمع والطرح.

٣- عند توفر بيانات جديدة وترغب باستخدامها مع البيانات القديمة للحصول على تخمين افضل فلا بد من اعادة كافة العمليات الحسابية السابقة.

مثال جد قيمة $f(3.16)$ وقدر الخطأ باستخدام الدالة $f(x) = \ln x$ وحسب الجدول التالي:

x	3.1	3.2
$f(x)$	1.1314	1.1632

ثانيًا

(الفروقات المنتهية.)

يوجد ثلاثة انواع من الفروقات هي الفروقات الامامية (forward) والفروقات الخلفية (Backword) والمركزية (central word).

لتكن f دالة حقيقية قيمتها معلومة في $(n+1)$ من النقاط $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ حيث ان

$$x_i = x_{i-1} + h$$

$$= x_0 + ih \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

اي ان الفرق بين قيم x المتتالية مقدار ثابت وقيمته h

$$y_i = f_i = f(x_i) = f(x_0 + ih)$$

١- الفروقات الامامية أو التقدمية

Forword Difference.

① تعرف الفروقات الامامية الاولى والتي يرمز لها بالرمز (Δ) وتعرف بالشكل التالي:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

عند النقطة x_i تكتب العلاقة بالشكل:

$$\Delta f(x_i) = f(x+h) - f(x)$$

عند النقطة x_i تكتب العلاقة بالشكل:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$= f(x_0 + (i+1)h) - f(x_0 + ih)$$

OR

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

② تعرف الفروقات الامامية الثانية والتي يرمز لها بالرمز (Δ^2) وتعرف بالشكل التالي:

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i))$$

$$= \Delta(f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

$$= \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$$

$$= f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

$$= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad , \forall i = 0,1,2,\dots,n-2$$

٣) وبصورة عامة تعرف الفروقات الامامية من الرتبة k والتي يرمز لها بالرمز (Δ^k) بالشكل التالي :

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1}(\Delta f_i)$$

$$= \Delta^{k-1}(f_{i+1} - f_i)$$

$$= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \quad , \forall i = 1,\dots,n-k$$

جدول الفروقات الامامية للدالة f عند النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	...	$\Delta^n f_i$
x_0	f_0					
		Δf_0				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$			
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$			$\Delta^n f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^3 f_{n-3}$		
			$\Delta^2 f_{n-2}$			
		Δf_{n-1}				
x_n	f_n					

مثال: جد الفروقات الامامية الاولى والثانية والثالثة للقيم التالية:-

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	10	17	26	37

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
		Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
2	5			
		5		
3	10		2	
		7		0
4	17		2	
		9		0
5	26		2	
		11		
6	37			

نلاحظ ان الفروقات $(\Delta^3 f_i)$ تساوي صفر عليه فأن افضل متعددة حدود يمكن ان تستخدم تكون من الدرجة الثانية.

ملاحظة: عندما تكون الدالة $f(x)$ متعددة حدود من الرتبة (n) فأن الفروقات الامامية من الرتبة $(n-1)$ تكون مساوية للصفر. في حين الفروقات من الرتبة (n) تحسب من المبرهنة التالية.

مبرهنة: اذا كانت $P_n(x)$ متعددة حدود من الدرجة (n) فأن

$$\Delta^n P_n(x) = n!\, a_n h^n$$

حيث a_n معامل الحد الذي يحتوي على x^n. $\Delta^{n+1} P_n(x) = 0$

مثال: احسب الفروقات الامامية من الرتبة 3 ولحد ٤ الحدود

$$P_3(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3$$

$h=2$ نبدأ بقيم x من 0 الى 8 ثم نحقق المبرهنة اعلاه

$$n=3, \quad a_3=5, \quad h=2$$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	-3	56	272	240	0
2	53	328	512	240	
4	381	840	752		
6	1221	1592			
8	2813				

$$\Delta^3 P_3(x) = n!\, a_n h^n = 3! * 5 * 2^3$$

$$= 240$$

$$\Delta^4 P_3(x) = 0$$

الفروقات الخلفية التراجعية

Back word differences.

يعرف معامل (مؤثر) الفروقات الخلفية (∇) (Nabla)
الاولى والثانية (∇^2) وبالرتبة k بصورة بالرمز (∇^k)
بالشكل التالي:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad , \forall\, i = n, n-1, \dots, 1$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1})$$

$$= \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

$$= f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2})$$

$$= f_i - 2 f_{i-1} + f_{i-2} \quad , \forall\, i = n, n-1, \dots, 2$$

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f_{i-j} \quad , i = n, n-1, \dots, n-k$$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^n f_i$
x_0	f_0				
x_1	f_1	∇f_1	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_3$ - - -	$\nabla^n f_n$
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_4$ . .	
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_4$	⋮ . .	
x_4	f_4	∇f_4	⋮	$\nabla^3 f_n$	
⋮	⋮	⋮	$\nabla^2 f_n$		
x_n	f_n	∇f_n			

مثال: احسب الفروقات الخلفية الاولى والثانية والثالثة للبيانات التالية:

x	0	2	4	6	8
$f(x)$	-3	53	381	1221	2813

الحل:

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
0	-3			
		56		
2	53		272	
		328		240
4	381		512	
		840		240
6	1221		752	
		1592		
8	2813			

ملاحظة: ان العلاقة بين الفروقات الامامية والخلفية هي

$(\nabla^k f_i = \Delta^k f_{i-k})$ حيث $i=2,3,\dots$.

يجب ان نبدأ $i=2$ والا لا يوجد لدينا فروقات خلفية لان اول خطوة $i=1$.

Central differences الفروقات المركزية

يعرف معامل (مؤثر) الفروقات المركزية δ للدالة f بالشكل التالي :.

$$\delta f(x) = f(x + \tfrac{1}{2}h) - f(x - \tfrac{1}{2}h)$$

$$\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$$

ولذلك نعرف الفروقات المركزية من الثانية بالشكل الآتي:.

$$\delta^2 f(x) = \delta(\delta f(x)) = \delta(f(x + \tfrac{1}{2}h) - f(x - \tfrac{1}{2}h))$$

$$= \delta f(x + \tfrac{1}{2}h) - \delta f(x - \tfrac{1}{2}h)$$

$$= f(x+h) - f(x) - (f(x) - f(x-h))$$

$$= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$

ايضاً

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

كذلك

$$\delta^3 f_i = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$$

H.W

x_i	f_i	δf_i	$\delta^2 f_i$	$\delta^3 f_i$	$\delta^4 f_i$
x_0	f_0				
		$\delta f_{1/2}$			
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{3/2}$		$\delta^3 f_{3/2}$	
x_2	f_2		$\delta^2 f_2$		$\delta^4 f_2$
		$\delta f_{5/2}$		$\delta^3 f_{5/2}$	
x_3	f_3		$\delta^2 f_3$		
		$\delta f_{7/2}$			
x_4	f_4				

ملاحظة:

① كل من مؤثرات الفروقات الامامية (Δ) والفروقات الخلفية (∇) والفروقات المركزية (δ) هي فروقات خطية (تحويلات خطية).

② هنالك بعض العلاقات بين جدول الفروقات الامامي والخلفي والمركزي هي

$$\Delta f_0 = \nabla f_1 = \delta f_{1/2}$$

$$\Delta^2 f_0 = \nabla^2 f_2 = \delta^2 f_1$$

$$\Delta^3 f_0 = \nabla^3 f_3 = \delta^3 f_{3/2}$$

والعلاقة العامة هي

$$\Delta^k f_{i-k} = \nabla^k f_i = \delta^k f_{\left(\frac{(i-k)+2}{2}\right)} \qquad i = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$