المحاضرة الاولى

التحليل العددي

المصادر:

١. "التحليل العددي" الدكتور نشاط إبراهيم العبيدي.

٢. "التحليل العددي وطرق حسابه العددية"
أ. د. محمد منصور صبح
د. صالح بن منيع الحربي

٣. "التحليل العددي وطرق حسابه العددية" أ. د. محمد منصور صبح
د. صالح بن منيع الحربي.

المفردات

مقدمة على التحليل العددي.
انواع الأخطاء.
امثلة تطبيقية عليها.
مقدمة في حل المعادلات غير الخطية
طريقة الرسم
طريقة التحليل
مقدمة في الطرق العددية لحل المعادلة غير الخطية
أ) طريقة التنصيف.
ب) طريقة الموضع الكاذب
ج) طريقة القطع.
د) الطريقة التكرارية للنقطة الصامدة.
هـ) طريقة نيوتن رافسون.

حل منظومات معادلات غير خطية:
الحل العددي لنظام المعادلات الخطية.
طرق مباشرة:
طرق تكرارية.

مقدمة في الاندراج
امثلة تطبيقية.
الفروقات المنتهية.
الفروقات التقدمية + امثلة.
الفروقات المركزية + امثلة.
الفروقات التراجعية + امثلة.
الفروقات المنتهية النسبية

مقدمة على التكامل العددي
طريقة شبه المنحرف + أمثلة.
طريقة سمسون + امثلة.
طريقة رمبرك + امثلة.

مقدمة طرق حل المعادلات التفاضلية بطرق عددية.
طريقة تيلر + امثلة.
طريقة اويلر + امثلة.
طريقة اويلر المطورة + امثلة.

مقدمة على التحليل العددي.

- مقدمة: في العديد من المسائل الرياضية التي يمكن عرضها يوجد لها حل. ولكن في بعض الاحيان يوجد مسائل من المستحيل ايجاد الحل لها بواسطة الطرق المعروفة كطرق الجبر والحسبان اي اننا لا نستطيع الحصول على الحل المضبوط لها لذا نلجأ عند الحاجة الى ايجاد الحل التقريبي (العددي) للمسألة الرياضية المراد ايجاد الحل لها.

مثال ١:

نلاحظ ان الحل المضبوط لـ $\int_1^4 e^{x^2}\,dx$ نظريًا موجود وذلك لان دالة التكامل e^{x^2} مستمرة على الفترة $[1,4]$ ولكن لا نستطيع ايجاد دالة الحل له لذلك نلجأ الى الحل بالطرق العددية لعدم امكانية الحل بالطرق الاعتيادية.

مثال ٢:

ايجاد المتجه $X \in R^n$ الذي يمثل الحل الوحيد للنظام $AX=b$ حيث $X, b \in R^n$ ، $A \in R^n \times R^n$.

لذا عندما تكون n كبيرة فأنه من الصعب ايجاد الحل لذا نلجأ الى الطرق العددية لايجاد قيمة المتجه X شرط ان تكون A مصفوفة غير شاذة (المحدد لها لا يساوي صفر).

تعريف:

- التحليل العددي: ان التحليل العددي هو علم التقريب حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المسائل المعقدة وغير قابلة للحل بالطرق التحليلية وينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء يجب معرفتها عند الحصول على أي إجابة وذلك لكي نحكم على قبول هذه الاجابة أو رفضها.

- الخوارزمية: هي مجموعة من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابية مصممة بشكل يؤدي الى حل المسألة المعطاة وبعدد محدود من الخطوات.

الأخطاء:

ليكن a قيمة مضبوطة، a^* قيمة تقريبية لها عندئذ يعرف الخطأ بالخطأ المطلق بالشكل التالي

$$e_a = |a - a^*| = E \quad (\text{Abslute error})$$

ويعرف الخطأ النسبي (Relative error)

$$S_a = \frac{|a - a^*|}{|a|} = \frac{E}{|a|} = Er \quad \text{لـ } |a| \neq 0$$

أما الخطأ المئوي (Percentage error) هو عبارة عن الخطأ النسبي مضروبًا بـ ١٠٠ اي يساوي

$$E_p = 100\,E_r = \frac{|a-a^*|}{|a|} * 100 \quad , |a| \neq 0$$

مثال: اذا كان جذر المعادلة هو $a = 1.55$ بينما باتباع طريقة عددية معينة حصلت على قيمة تقريبية $a^* = 1.49$ فجد: ① الخطأ المطلق E.

② الخطأ النسبي E_r.

③ الخطأ المئوي E_p.

الحل:

① $E = |a - a^*| = |1.55 - 1.49|$

$E = 0.06$.

②

$$E_r = \frac{E}{|a|} = \frac{0.06}{1.55} = 0.0387.$$

③

$E_p = E_r * 100 = 0.0387 * 100$

$E_p = 3.87$.

مصادر الأخطاء :-

ان الخطأ الحاصل في حل تقريبي في مسألة ما غالباً ما يكون بسبب تراكم عدة أخطاء ناتجة من :-

١- أخطاء طبيعية (متأصلة) Inherent Errors

وهو الخطأ الناتج من قيم البيانات الداخلة والناتجة من عدم دقة القياسات مثل قراءات بعض الاجهزة في تجربة مختبرية .

٢- أخطاء صياغة (تحليلية) Famulation Errors

وهو الخطأ الناتج من تحليل مسألة معينة وتحويلها الى مسألة حسابية حيث ان النموذج الرياضي يعطي الصورة الحقيقية للظاهرة وذلك نادراً اي قد تهمل بعض العوامل والمؤثرات في هذه الحالة عندئذٍ النتائج تكون محملة بأخطاء صياغية .

٣- أخطاء حسابية Computation Errors.

٤) أخطاء البتر Truncation Errors

وهو الخطأ الناشئ عن استبدال عملية غير منتهية (Infinite process) بعملية منتهية (finite process) مثلاً عند حساب قيمة دالة معرفة بشكل متسلسلة غير منتهية فان قيمة الدالة لايمكن احتسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة بل نتوقف عند حد معين هنا التوقف يولد خطأ في قيمة الدالة .

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

عند حساب $\sin 3$

$$\sin 3 = 3 - \frac{3^3}{3!} + \frac{3^5}{5!} \cdots \neq$$ رقم

لذلك نتوقف عند حد معين ولذلك يظهر لدينا اخطاء وهو خطأ البتر

$$\sin 3 \cong 3 - \frac{27}{6} \cong -1.5$$

ب) اخطاء التدوير (التقريب) Round of Errors

ينتج هذا الخطأ عن تقريب الكسور العشرية ذات المراتب العشرية العديدة الى اعداد ذات مراتب عشرية تتناسب مع طبيعة المسألة والدقة المطلوبة. مثلاً

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots \cong 0.3333$$

$$3.1415926 \cong 3.14159$$

$$0.5235724 \cong 0.5236$$

٤- الخطأ المتراكم Accumulation Error

هو الخطأ الناتج من تكرار مجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة (عند حل بعض الطرق العددية التكرارية) ويزداد بالاعتماد على القيم التقريبية المحسوبة من الخطوات السابقة.

المحاضرة الثامنة

الأخطاء في العمليات الحسابية

لتكن x^* و y^* قيمتين تقريبيتين للعددين x و y ونخطأ مطلق e_x و e_y والخطأ النسبي S_x و S_y .

١- الخطأ في عمليتي الجمع والطرح

الخطأ المطلق

الجمع

$$e_{x+y} = |(x+y)-(x^*+y^*)| = x+y-(x^*+y^*)$$

$$= x+y-x^*-y^*$$

$$= (x-x^*)+(y-y^*)$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

Note الخطأ المطلق لحاصل جمع عددين يساوي الخطأ المطلق للعدد الاول + الخطأ المطلق للعدد الثاني .

الطرح

$$e_{x-y} = |(x-y)-(x^*-y^*)|$$

$$= x-y-x^*+y^*$$

$$= (x-x^*)-(y-y^*)$$

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

Note

الخطأ المطلق لحاصل طرح عددين يساوي الخطأ المطلق للعدد الاول - الخطأ المطلق للعدد الثاني .

الخطأ النسبي :

الجمع

$$S_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{|x+y|}$$

$$= \frac{e_x + e_y}{x+y}$$

$$S_x = \frac{e_x}{x} \Rightarrow e_x = x S_x$$

$$S_y = \frac{e_y}{y} \Rightarrow e_y = y S_y$$

$$S_{x+y} = \frac{x S_x + y S_y}{x+y}$$

الطرح

$$S_{x-y} = \frac{e_{x-y}}{x-y}$$

$$= \frac{e_x - e_y}{x-y}$$

$$S_{x-y} = \frac{x S_x - y S_y}{x-y}$$

٢- الخطأ في عمليتي الضرب والقسمة

الخطأ المطلق

$$e_{xy} = |xy - x^* y^*|$$

$$e_x = x - x^* \Rightarrow x^* = x - e_x$$

$$e_y = y - y^* \Rightarrow y^* = y - e_y$$

$$= xy - (x - e_x)(y - e_y)$$

$$= \cancel{xy} - \cancel{xy} + x e_y + y e_x - e_x e_y$$ ← تهمل قيمة قليلة جداً

وبإهمال الحد $e_x e_y$ بعد افتراضنا ان الأخطاء صغيرة بالنسبة للقيمة التقريبية عندئذٍ نحصل على

$$e_{xy} = x e_y + y e_x$$

النسبي

$$S_{xy} = \frac{e_{xy}}{|xy|}$$

$$= \frac{x e_y + y e_x}{xy}$$

$$= \frac{\cancel{x} e_y}{\cancel{x} y} + \frac{\cancel{y} e_x}{x \cancel{y}}$$

$$= \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

$$S_{xy} = S_y + S_x = S_x + S_y$$

H.W

$$e_{x/y} \overset{??}{=} \frac{x}{y}\left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right)$$

$$S_{x/y} \overset{??}{=} S_x - S_y$$

مثال :- أوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق في المجموع

$$\overset{x}{x+y=12.23}+\overset{y}{3.12}$$

Note :- استخدم القانون

$$e_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^n}\right)$$

حيث ان n هي عدد المراتب العشرية

$$e_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2}\right) = 0.005$$

$$e_y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2}\right) = 0.005$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

$$= 0.005 + 0.005$$

$$= 0.01$$

H.w :- أوجد الحد الاعلى للخطأ الحاصل لضرب العددين المطلق.

$$x.y = (2.23)(12.3)$$

بعض التعاريف الخاصة بالمقياس

المقياس: يعرف مقياس المتجه (Vector norm) على R^n على أنه دالة $\|.\|: R^n \to IR$ وتحقق ما يلي:

$1-\ \|X\| \geq 0 \ ,\ \forall X \in IR^n$

$2-\ \|X\| = 0 \iff X = 0$

$3-\ \|\alpha X\| = |\alpha|\ \|X\| \ ,\ \alpha \in R \ ,\ X \in R^n$

$4-\ \|X+y\| \leq \|X\| + \|y\| \ ,\ X, y \in R^n$

يوجد عدة أنواع من المقاييس سنعرف ثلاثة فقط:

المقياس المطلق $1-\ \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$

المقياس الاقليدي or (2-norm) $2-\ \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

المقياس المنتظم or (∞ norm) $3-\ \|X\|_\infty = \underset{1 \leq i \leq n}{Max} |X_i|$

ملاحظة: جميع المقاييس أعلاه هي حالة خاصة من المقياس P والذي يعرف بـ:

$$\|X\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}$$

مثال: إذا علمت أن $X = (1, -1, -2)^T$ حيث $X \in \mathbb{R}^3$

جد ① المقياس المطلق ② المقياس الاقليدي ③ المقياس المنتظم.

الحل:

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n=3} |X_i| = |X_1| + |X_2| + |X_3|$$

$$= |1| + |-1| + |-2|$$

$$= 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n=3} x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\|X\|_\infty = \operatorname{Max} |x_i|$$

$$= \operatorname{Max} \{ |x_1|, |x_2|, |x_3| \}$$

$$= \operatorname{Max} \{1, 1, 2\}$$

$$\|X\|_\infty = 2$$

الحلول العددية للمعادلات اللاخطية

هنالك العديد من المسائل الرياضية التي يتطلب حلها الى ايجاد الجذور للمعادلة اللاخطية $f(x)=0$ ولكن في اغلب الاحيان لا يمكن ايجاد هذه الجذور بالطرق التقليدية الجبرية.

لذا نلجأ الى ايجاد الجذور بإستخدام الطرق العددية (الخوارزميات) وبإستخدام الحاسوب.

المعادلات اللاخطية:

هي المعادلات التي تكون درجتها اكبر من واحد او تحتوي على دوال متسامية $(\sin x, \cos x, e^x, \ln x, a^x)$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+1=0 \\ \sin x+x=0 \\ e^x=0 \\ a^x=0 \end{array}\right\} \text{معادلات لاخطية.}$$

الجذر: يسمى العدد α جذراً للمعادلة $f(x)=0$ اذا كان $f(\alpha)=0$

ملاحظة

اذا كان α جذراً مضبوطاً للمعادلة $f(x)=0$ فأن α_n جذراً تقريبياً لها اذا كان

$$|\alpha-\alpha_n| \le \epsilon$$

أو

$$|f(\alpha_n)| \le \delta$$

حيث ان كل من ϵ و δ مقادير صغيرة جداً تمثل دقة الحل التقريبي.

تعيين مواقع جذور المعادلة $f(x)=0$

على فرض ان الدالة f دالة مستمرة على فترة محدودة وان جذورها جذور حقيقية.

1- اذا كانت f متعددة حدود (تعيين مواقع الجذور من خلال الحد الاعلى والاسفل للجذر).

يمكن تعيين مواقع الجذور للمعادلة $f(x)=0$ بالاعتماد على النظرية التالية:

اذا كان α جذراً للمعادلة

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

فإن

$$|\alpha|<1+\max|a_i|=1+\lambda$$

حيث ان $\lambda=\max|a_i|$ وان a معاملات قوى x

مثال: $f(x)=x^3-2x^2+3x+1=0$

الحل $\lambda=\max|a_i|$; $|\alpha|<1+\lambda$

$$\lambda=\max\{|1|,|-2|,|3|,|1|\}$$

$$\lambda=3$$

$$|\alpha|=1+3=4$$

$$-4 \leq \alpha \leq 4$$

٢- تعيين مواقع الجذور باستخدام الرسم البياني (المفهوم الهندسي).

أ- نرسم $f(x)=y$ عندئذٍ نقاط تقاطع منحني الدالة مع المحور السيني (x-axise) تمثل جذور (جذور تقريبية) للمعادلة $f(x)=0$.

ب- اذا كانت الدالة $y=f(x)$ من الدوال التي يكون من الصعب رسمها عندئذٍ تكتب $f(x)$ بالشكل

$$f_1(x) = f_2(x)$$

حيث كل من $f_1(x)$, $f_2(x)$ ممكن رسمها بسهولة لذلك تكون مساقط نقاط تقاطع المنحني على المحور السيني جذور أو جذور تقريبية للمعادلة $f(x)=0$

مثال

الحل

$$f(x) = x^2 - 1 = 0$$

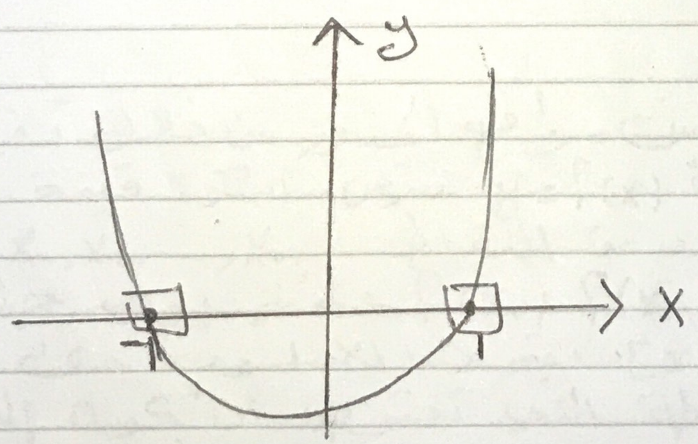
$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \sqrt{1}$

$\Rightarrow x = -1$

or $x = 1$



مثال

$$f(x) = e^{x}\sin x - 1 = 0$$

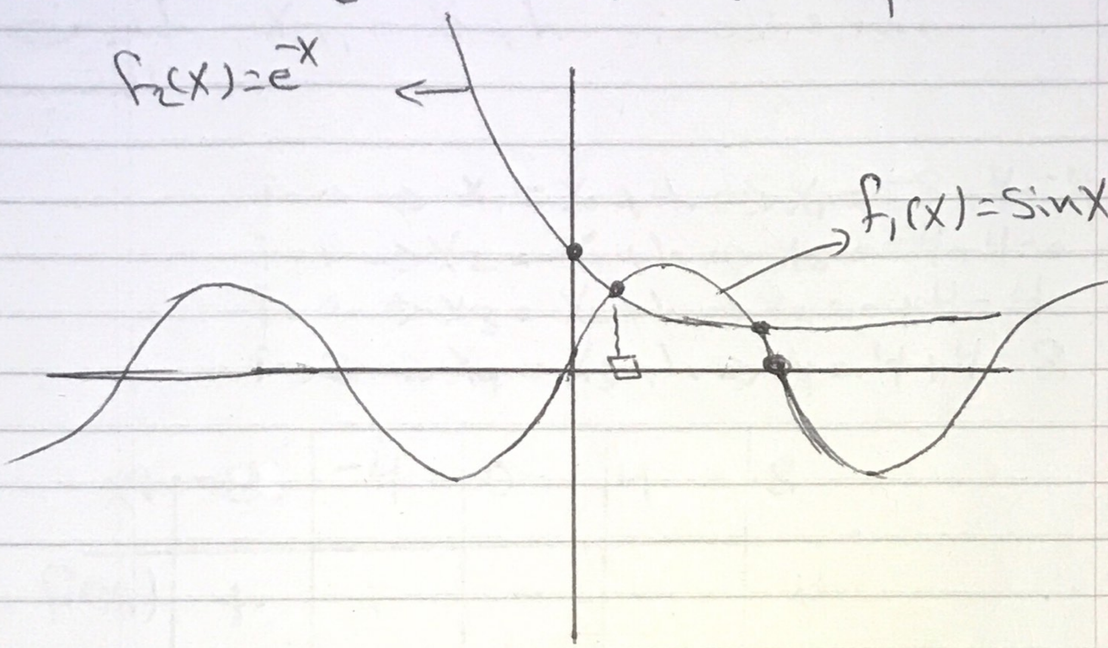
الحل

$$e^{x}\sin x = 1$$

$$\sin x = e^{-x}$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

في الرسم البياني نبين فقط مواقع الجذور



٣- تعيين مواقع الجذور من خلال تغيير اشارة الدالة $y = f(x)$ ندرس اشارة قيمة الدالة $f(x)$ عند عدد من النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإذا كانت $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) > 0$ عندئذ يوجد جذر في الفترة $[x_i, x_{i+1}]$ يعتمد هنا الاسلوب على مبرهنة القيمة المتوسطة التي تفترض ان تكون الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[x_i, x_{i+1}]$ وأن $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$

مثال: عين مواقع جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$$

على الفترة $[-8, 8]$.

الحل:

① $(h = 4)$

لتعيين التقسيمات $x_{i+1} = x_i + h \quad , i = 0, 1, 2, \dots$

$i = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 + h \Rightarrow x_1 = -8 + 4 = -4$

$i = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 + h \Rightarrow x_2 = -4 + 4 = 0$

$i = 2 \Rightarrow x_3 = x_2 + h \Rightarrow x_3 = 0 + 4 = 4$

$i = 3 \Rightarrow x_4 = x_3 + h \Rightarrow x_4 = 4 + 4 = 8$

x_i	-8	-4	0	4	8
$f(x_i)$	+	+	−	−	+

$f(-8) \cdot f(-4) > 0$ ✗

$f(-4) \cdot f(0) < 0$ ✓

$f(0) \cdot f(4) > 0$ ✗

$f(4) \cdot f(8) < 0$ ✓

٢- $(h=2)$

$x_0 = -8$
$x_1 = -6$
$x_2 = -4$
$x_3 = -2$
$x_4 = 0$
$x_5 = 2$
$x_6 = 4$
$x_7 = 6$
$x_8 = 8$

وايضًا نقوم بحساب قيمة الدالة عند كل هذه النقاط ثم نختبر الفترات.

الطرائق التكرارية لايجاد الجذور التقريبية للمعادلات غير الخطية

١- طريقة تنصيف المجال Bisection Method

لتكن $f \in c[a,b]$ وأن $f(a) \cdot f(b) < 0$

لذا فان هنالك جذر وهو

$$c = \frac{a+b}{2}$$

فان كان $f(c) = 0$ فان c هو الجذر المطلوب

واذا لم تكن فاننا نأخذ الفترتين cb و ac

ثم نجري عملية التنصيف مرة اخرى على احدى الفترات ونستمر الى ان تحقق شرط التقارب

$$|c_n - c_{n-1}| \leq \epsilon$$

أو $|f(x_n)| \leq \delta$

حيث ان ϵ وδ مقادير صغيرة جداً تمثل دقة الحل التقريبي.

خوارزمية طريقة التنصيف.

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة ضمن الفترة المغلقة $[a,b]$

خطوة (1)

ادخال a, b, N_0 (العدد من الخطوات) , ϵ (دقة الحل) الدالة $f(x)$.

خطوة (2)

حساب $f(a) * f(b) < 0$ ضع $i = 1$ والا توقف مع ابدال قيم a, b.

خطوة (3)

اذا كان $i < N_0$ كرر الخطوات (4 - 7).

خطوة (4)

ضع $c = \frac{a+b}{2}$ واحسب $f(c)$.

خطوة (5)

اذا كان $(f(c) = 0)$ أو $(|b-a| < \epsilon)$ فان c هو الجذر وتوقف.

خطوة (6)

والا ضع $i = i + 1$

خطوة (7)

اذا كان $f(c) * f(a) > 0$ ضع $a = c$ والا $b = c$

$(c,)$

التقارب والخطأ المتوقع في طريقة تنصيف المجال

مبرهنة: لتكن $f \in C[a,b]$ وأن $f(a) * f(b) < 0$ فأن طريقة تنصيف المجال:

1- تولد المتتابعة $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ تقترب الى الجذر المضبوط α.

2- تحقق $\frac{b-a}{2^n} \geq e_n = |c_n - \alpha|$ حيث ان عدد التكرارات n ، $n \geq 1$.

ملاحظة: يمكننا تقدير عدد التكرارات n اللازمة للوصول الى دقة معينة ϵ كما يلي:

$$e_n \leq \frac{b-a}{2^n} < \epsilon$$

$$\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$$

$$b-a < 2^n \epsilon$$

$$2^n > \frac{b-a}{\epsilon}$$

$$\ln 2^n > \ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)$$

$$n \ln 2 > \ln(b-a) - \ln \epsilon$$

$$n > \frac{\ln(b-a) - \ln \epsilon}{\ln 2}$$

مثال اذا كانت $a=0$, $b=2$ وان
$\epsilon = 10^{-3} = 0.001$
احسب قيمة n التقريبية.

الحل

$$n > \frac{\ln(b-a) - \ln \epsilon}{\ln 2}$$

$$n > \frac{\ln(2-0) - \ln(0.001)}{\ln 2}$$

$$n > 10.9657$$

$$n \cong 11$$

خواص طريقة التنصيف.

١. تحتاج الى عدد كبير من الخطوات لانها بطيئة جداً
عند ايجاد الجذر وعليه رتبة التقارب تكون خطية
(Linear)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha|}{|\alpha_n - \alpha|^R} = k$$

حيث R تمثل رتبة التقارب.

$R = 1$ التقارب خطي (linear)

$R = \frac{1}{2}$ التقارب فوق الخطي (supper Linear)

$R = 2$ التقارب تربيعي (Quadratic)

٢- مضمونة الوصول الى الحل لهذا فهي ذات نوع اقترابي شمولي (globaly convergent).

٣- يتم تقليص الفترات بعامل نصف $(\frac{1}{2})$.

٤- رتبة الخطأ فيها $O(2^{-n})$ حيث ان n عدد الخطوات.

<u>مثال</u>: جد جذر المعادلة $f(x) = x\sin x - 1 = 0$ الواقع ضمن الفترة $[0, 2]$ باستخدام طريقة التنصيف.

<u>الحل</u>

$$f(x) = x\sin x - 1$$

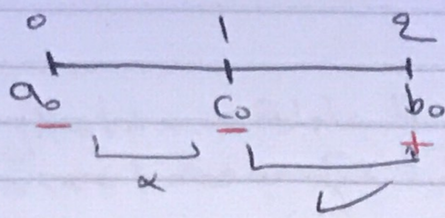
$$a_0 = 0 \quad , b_0 = 2$$

$$f(a_0) = -1 \quad , f(b_0) = 0.81859$$

$$f(a_0) * f(b_0) < 0$$

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

$$f(c_0) = f(1) = -0.158529$$

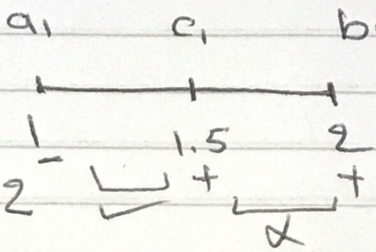


$$f(a_0) * f(c_0) = - \cdot - > 0 \quad ✗$$

$$f(c_0) * f(b_0) = - \cdot + < 0 \quad ✓$$

$$\Rightarrow a_1 = c_0 = 1 \quad , b_1 = b_0 = 2$$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$



$$F(c_1) = F(1.5) = 0.496242$$

$$f(a_1) * f(c_1) < 0 \quad ✓$$

$$f(c_1) * f(b_1) > 0 \quad ✗$$

$$a_2 = a_1 = 1, \quad b_2 = c_1 = 1.5$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

$$\vdots$$

H.W

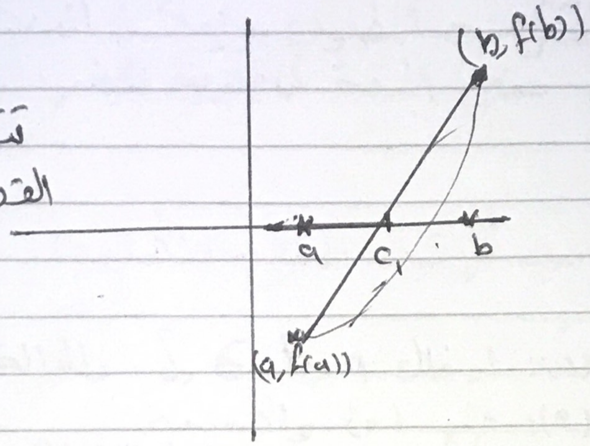
① جد جذراً للمعادلة $f(x) = x\log x - 1 = 0$
ضمن الفترة [1,2] بدقة 0.001 بطريقة
التنصيف ثم جد قيمة n.

② لدينا المعادلة $f(x) = 3x^3 - x + 1$
معرفة ضمن الفترة [-1,0] جد جذراً للمعادلة
بطريقة التنصيف اذا علمت ان مقدار الخطأ لايتجاوز
$\epsilon = 0.0005$ ،

٢- طريقة الموضع الكاذب false position Method

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة ضمن الفترة المغلقة $[a,b]$ ولكن شرط ان $f(a)$, $f(b)$ مختلفات بالاشارة.

نرسم قطعة مستقيمة (L) تصل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ وتقطع المحور X عند النقطة $(c_1, 0)$



تتولد c_1 من تقاطع القطعة مع المحور X

عليه نحسب قيمة c_1 من معادلة خط مستقيم L

$$\frac{y-y_2}{x-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-f(b)}{x-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نضع $x = c_1$ وعليه فان $y = 0$

$$\frac{0-f(b)}{c_1-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$(c_1-b)\left(f(b)-f(a)\right) = (b-a)\left(-f(b)\right)$$

$$(c_1 - b) = \frac{-f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$c_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

وهو التقريب المطلوب ويمكن ان نكرر هذه العملية للحصول على الدقة المطلوبة للجذر.

خوارزمية طريقة الموضع الكاذب.

خطوة (١): ادخال a و b , ϵ , δ والدالة $f(x)$.

خطوة (٢): ضع $i=1$ واحسب

$$dx = \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

ثم احسب $c = b - dx$

خطوة (3): اذا كان $f(c)=0$. أطبع c هو الجذر، وتوقف.

خطوة (٤): واذا كان $f(b) * f(c) > 0$ ضع $b=c$ و $f(b) = f(c)$ والا ضع $a=c$, $f(a)=f(c)$.

خطوة (5): نحسب مقياس التوقف اذا كان $|dx| < \epsilon$ و $|f(c)| < \delta$ اطبع الجذر c وتوقف والا اذهب الى خطوة (٢) وضع $(i+1)=i$.

خواص طريقة الموضع الكاذب

١- هذه الطريقة تتقارب اسرع من طريقة التنصيف

٢- نلاحظ عدم استخدام مقياس التوقف ب $|b_n - a_n|$ اقل من ϵ بسبب اذا كان $|b_n - a_n|$ تقترب الى الصفر كان المقياس الثاني $f(n) \approx 0$.

٣- مضمونة الوصول الى الجذر ولنا منها نوع اقتراب شمولي (global convergent).

٤- سرعة الاقتراب خطية (Linear Convergent).

مثال: استخدم طريقة الموضع الكاذب لإيجاد جذر الدالة
$f(x) = x\sin x - 1$ في الفترة $[0,2]$.

الحل:

$$a_0 = 0 \quad , \quad b_0 = 2$$

$$f(a_0) = -1 \quad , \quad f(b_0) = 0.8185949$$

$$f(a) \times f(b) < 0$$

$$c_0 = b_0 - \frac{f(b_0)(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

$$c_0 = 2 - \frac{f(2)(2-0)}{f(2) - f(0)}$$

$$c_0 = 2 - \frac{0.8185949(2)}{0.8185949 - (-1)}$$

$$c_0 = 1.0997502$$

$$f(c_0) = -0.0200192$$

$$f(b_0) \times f(c_0) < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = c_0 \\ b_1 = b_0 \end{array}$$

$$[a_1, b_1] = [1.0997502, 2]$$

$$c_1 = b_1 - \frac{f(b_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

$c_1 = 1.1212407$

$f(c_1) = 0.0098345$

$f(b_1).f(c_1) > 0 \Rightarrow b_2 = c_1$
$a_2 = a_1$

$[a_2, b_2] = [1.0997502, 1.1212407]$

$c_2 = 1.1141612$

$f(c_2) = 0.0000056$

$c_3 = 1.1141571$

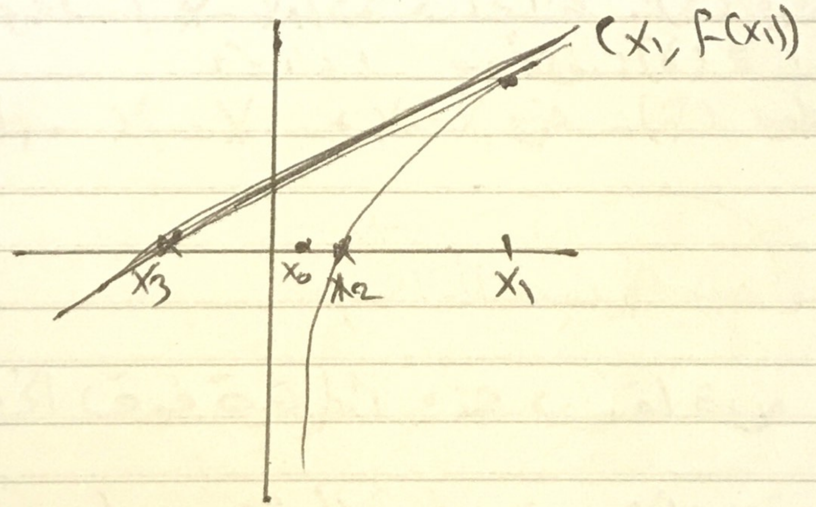
$\vdots$

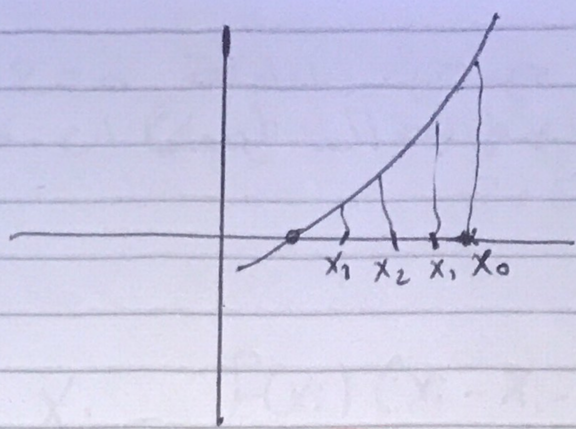
٣ـ طريقة القاطع Secant Method.

هذه الطريقة تشبه طريقة الموضع الكاذب.

اولاً نجد تقريب x_0 , x_1 وليس بالضرورة ان يكونا على جهتي الجذر α كما في الموضع الكاذب ويجب ان يكون اختيار التخمينين الاوليين x_0 , x_1 بحيث ميل المستقيم الواصل بين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ ليس قريباً من الصفر يعني مشتقة الدالة f قرب التخمينين ليست قريبة من الصفر لكي لا نحصل على متتابعة متقاربة ببطء أو متباعدة ويمكن تلخيص العملية بأخذ x_1 , x_0 ونجد x_2 على المنحنى بعدها نستخدم x_2 , x_1 لايجاد النقطة التقريبية الجديدة x_3 وهكذا حسب الصيغة التالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$





خوارزمية طريقة القاطع

خطوة (١): ادخال x_0 ، x_1 ، ϵ ، N_0 ، $f(x)$.

خطوة (٢): ضع $i=1$ واحسب $y_0=f(x_0)$ ، $y_1=f(x_1)$.

خطوة (٣): عندما $i \le N_0$ ، نفذ الخطوات من 4 الى 7 .

خطوة (٤): ضع $x = x_1 - y_1(x_1-x_0)/(y_1-y_0)$

خطوة (٥): اذا كان $|x - x_1| < \epsilon$ اطبع x هو الجذر/ وتوقف .

خطوة (٦): والا ضع $i=i+1$

خطوة (٧): ضع $x_0=x_1$ ، $x_1 = x$ ، $y_0=y_1$ ، $y_1=f(x)$

خواص طريقة القاطع

١- سرعة اقتراب هذه الطريقة فوق الخطية (Supper Linear).

٢- تحتاج الى حساب قيمة الدالة مرة واحدة في كل تكرار .

٣- نوع الاقتراب محلي (Locally Convergent) لاننا نحتاج ان تكون نقاط البداية على احد طرفي الجذر .

مثال: جد جذر المعادلة $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$
باستخدام طريقة القاطع علماً ان $x_0 = -2.6$ ، $x_1 = -2.4$ و
و $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$

الحل

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$\boxed{i=1}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= -2.4 - \frac{f(-2.4)(-2.4+2.6)}{f(-2.4) - f(-2.6)}$$

$$x_2 = -2.106599$$

$$|x_2 - x_1| = |-2.106599 - (-2.4)| \not< \epsilon$$

$\boxed{i=2}$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$x_3 = -2.0226414$$

$$|x_3 - x_2| \not< \epsilon$$

$\boxed{i=3}$

$$X_4 = X_3 - \frac{f(X_3)(X_3 - X_2)}{f(X_3) - f(X_2)}$$

$$X_4 = -2,0015111$$

$$|X_4 - X_3| \not< \epsilon$$

$\boxed{i=4}$

$$X_5 = -2,0000225$$

$$|X_5 - X_4| \not< \epsilon$$

$\boxed{i=5}$

$$X_6 = -2$$

$$|X_6 - X_5| = 0,0000225 < \epsilon$$

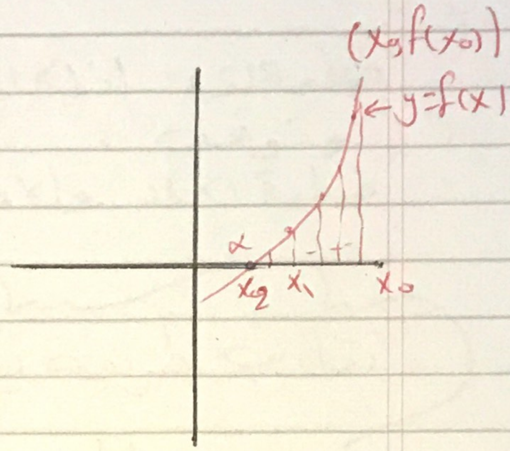
$= 0,00005$

٤- طريقة نيوتن رافسون (Newton-Raphson Method)

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق، نختار x_0 نقطة بداية وتكون قريبة من الجذر α نرسم $y=f(x)$ نلاحظ المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ يقطع المحور x في نقطة ولتكن x_1 ويتم حساب صيغة x_1 كالاتي:

على اعتبار ان الجذر للمعادلة فالدالة عند $y=0$

$$m = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



$$\because m = f'(x_0)$$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$(x_1 - x_0)\, f'(x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبعد n من الخطوات نحصل على صيغة الجذر التقريبي لطريقة نيوتن رافسون

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

خوارزمية طريقة نيوتن رافسون

خطوة (١): ادخال الدالة $f(x)$ ومشتقة الدالة $f'(x)$، x_0، ϵ، N_0 (عدد التكرارات).

خطوة (٢): ضع $i=1$.

خطوة (٣): اذا $N_0 \geq i$ كرر الخطوات من 4 الى 6.

خطوة (٤): احسب الجذر

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

خطوة (٥): اذا كان $|x-x_0|<\epsilon$ فأن x هو الجذر التقريبي وتوقف.

خطوة (٦): والا ضع $x_0 = x$ و $i = i+1$

تقارب طريقة نيوتن-رافسون

مبرهنة: لتكن $f \in c[a,b]$، اذا كان $\alpha \in [a,b]$ بحيث ان $f(\alpha)=0$ وان $f'(\alpha) \neq 0$ فأنه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان طريقة نيوتن-رافسون تكون متتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب الى الجذر α لكل

$$x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$$

خواص طريقة نيوتن رافسون

١- سرعة الاقتراب تربيعية (Quadratic convergent) حيث ان الخطأ المطلق

$$e_{n+1} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_n^2$$

٢- نوع الاقتراب محلي (Localy convergent) لان نقطة البداية يجب ان تكون قريبة من الجذر المطلوب.

٣- يتطلب حساب مشتقة الدالة عند كل تكرار ولا يمكن ضمان التقارب عندما $f'(x_n) \to 0$

الشروط الواجب توفرها لكي تتقارب طريقة نيوتن - رافسون عند نقطة البداية $x_0 \in [a,b]$:

١- ان حاصل ضرب $f(a) \cdot f(b) < 0$ لضمان وجود جذر في الفترة $[a, b]$.

٢- المشتقة الاولى للدالة لا تساوي صفر ($f'(x_n) \neq 0 \;\; \forall \; x_n \in [a, b]$) بمعنى لا توجد نهاية عظمى أو صغرى في الفترة $[a, b]$.

٣- المشتقة الثانية للدالة لا تتغير اشارتها ضمن الفترة $[a, b]$ بمعنى عدم وجود نقاط انقلاب للدالة $f(x)$ اي منحني الدالة $f(x)$ يكون اما مقعراً أو محدب ضمن الفترة $[a, b]$.

٤- ان يكون $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < |b-a|$ و $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < |b-a|$

لكي نحصل على تقارب اي اذا كانت $x_n \in [a,b]$ فان $x_{n+1} \in [a,b]$.

مثال: جد جذر الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 2$ بأخذ $x_0 = -2.4$ ، $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$ باستخدام طريقة نيوتن رافسون.

الحل:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_0 = -2.4$$

$\boxed{n=1}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$x_1 = -2.4 - \frac{f(2.4)}{f'(2.4)} = -2.0763$$

$$|x_1 - x_0| = |-2.0763 + 2.4| \not< \epsilon = 0.00005$$

$$x_0 = x_1 \Rightarrow x_0 = -2.0763$$

$\boxed{n=2}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -2.0763 - \frac{f(-2.0763)}{f'(2.0763)}$$

$$x_2 = -2.003699$$

$$|x_2 - x_1| \not< \epsilon$$

$$x_0 = x_2 = -2.003699$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = -2.000009$$

$$|x_3 - x_2| = |-2.000009 + 2.003699|$$

$$= 0.00369 \nless \epsilon = 5 \times 10^{-5}$$

$\boxed{n=4}$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$x_4 = -2$$

$$|x_4 - x_3| = |-2 + 2.000009|$$

$$= 0.000009 < \epsilon$$

الحالات الخاصة لطريقة نيوتن - رافسون،

الحالة الأولى

- ايجاد الجذور التربيعية (Square Roots).

لايجاد الجذر التربيعي لأي رقم وليكن $A>0$ بإستخدام طريقة نيوتن - رافسون نأخذ الدالة

$$f(x) = x^2 - A = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{A}$$

وبتطبيق صيغة نيوتن - رافسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= X_n - \frac{X_n^2 - A}{2X_n}$$

$$= \frac{2X_n^2 - X_n^2 + A}{2X_n} = \frac{X_n^2 + A}{2X_n}$$

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left\{X_n + \frac{A}{X_n}\right\} \quad , n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

مثال: جد الجذر التربيعي للعدد 5 ، $\epsilon = 10^{-5}$

الحل: نفرض ان الدالة هي

$f(x) = x^2 - 5$

وان $f'(x) = 2x$ ونأخذ $x_0 = 2$

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left\{X_n + \frac{A}{X_n}\right\} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(X_0 + \frac{5}{X_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right)$$

$$= 2.25$$

$$|X_1 - X_0| \not< \epsilon \rightarrow X_0 = X_1$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{5}{X_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2.25 + \frac{5}{2.25}\right)$$

$$X_2 = 2.236111$$

$$|x_2 - x_1| = |2.236111 - 2.25| \not< \epsilon$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left\{x_2 + \frac{5}{x_2}\right\} = \frac{1}{2}\left(2.236111 + \frac{5}{2.236111}\right)$$

$$x_3 = 2.23607$$

$$|x_3 - x_2| = 0.000041 \not< \epsilon$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left\{x_3 + \frac{5}{x_3}\right\}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(2.23607 + \frac{5}{2.23607}\right)$$

$$x_4 = 2.236068$$

$$|x_4 - x_3| = 0.000002 < \epsilon$$

الحالة الثانية:

ايجاد الجذر لدى رتبة k اذا كانت $f(x) = x^k - A$
$A>0$، k عدد صحيح نفس الاسلوب المتبع في الحالة الاولى

$$X_{n+1} = X_n - \frac{X_n^k - A}{k X_n^{k-1}}$$

$$X_{n+1} = X_n - \frac{\cancel{X_n^k}}{k \cancel{X_n}^{k-1}} - \frac{A}{k X_n^{k-1}}$$

$$= X_n - \frac{1}{X_n^{-1} k} - \frac{A}{X_n^{k-1} k}$$

$$X_{n+1} = X_n \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{A}{k} X^{1-k}$$

$k = 2, 3, 4$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

مثال: إيجاد الجذر التكعيبي للعدد 7 ، $\sqrt[3]{7}$ علماً
ان $x_0 = 1.5$ ، $\epsilon = 10^{-3}$ ..

الحل: $k = 3, A = 7$. $x_0 = 1.5$

$$f(x) = x^3 - 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n + \frac{A}{k} x_n^{1-k}$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) x_0 + \frac{7}{3} x_0^{-2}$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) 1.5 + \frac{7}{3} (1.5)^{-2}$$

$$= \frac{2}{3}(1.5) + \frac{7}{3(1.5)^2}$$

$$= 2.03704$$

$$|x_1 - x_0| = |2.03704 - 1.5| \not< \epsilon$$

$$x_2 = 1.92034$$

$$x_3 = 1.91296$$

$$x_4 = 1.91293$$

$$|x_4 - x_3| < \epsilon$$

الحالة الثالثة:

ايجاد مقلوب اي رقم اذا كان الرقم هو A
فمقلوبة $x=\frac{1}{A}$ وتكون الدالة $\frac{1}{x}-A=0 \Leftarrow A=\frac{1}{x}$

$$f(x)=\frac{1}{x}-A$$

وباستخدام طريقة نيوتن-رافسون

$$X_{n+1}=X_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=X_n-\frac{\frac{1}{x_n}-A}{-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$=X_n-\frac{\frac{1-x_nA}{\cancel{x_n}}}{-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$X_{n+1}=X_n+X_n(1-AX_n)$$

$$=X_n(1+1-AX_n)$$

$$X_{n+1}=X_n(2-AX_n)$$

$n=0,1,2,\dots$

مثال: استخدم طريقة نيوتن - رافسون لايجاد مقلوب الرقم 2 مع أخذ $x_0 = 0.1$ ولاربعة مراتب عشرية و $\epsilon = 10^{-4}$

الحل:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$A = 2$ $\qquad$ $x_0 = 0.1$

$$x_{n+1} = x_n (2 - A x_n)$$

$$x_1 = x_0 (2 - 2 x_0)$$
$$= 0.1 (2 - 2(0.1)) = 0.18$$

$$|x_1 - x_0| \not< \epsilon = 10^{-4}$$

$$x_2 = x_1 (2 - 2 x_1)$$
$$= 0.18 (2 - 2(0.18)) = 0.2952$$

$$|x_2 - x_1| \not< \epsilon$$

$$x_3 = 0.4161$$

$$x_4 = 0.4859$$

H.W

استخدم طريقة نيوتن-رافسون وحالاته لايجاد ما يلي :

١) $f(x) = x\sin x - 1$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 10^{-5}$

٢) $f(x) = x^2 - 16 = 0$, $\epsilon = 10^{-5}$,

٣) $f(x) = x^3 - 27 = 0$, $\epsilon = 10^{-3}$

٤) $f(x) = \frac{1}{x} - 4$, $x_0 = 0.2$, $\epsilon = 10^{-4}$

٥- طريقة النقطة الصامدة (الثابتة)
Fixed point Method

في هذه الطريقة نولد المعادلة $X=g(X)$ من المعادلة الاصلية $f(x)=0$ ثم نختار نقطة ابتدائية (حل ابتدائي) ولتكن X_0 نعوضها في المعادلة $X=g(X)$ نحصل على تقريب جديد $X_1=g(X_0)$ ثم نكرر الخطوة بتجديد المتغيرات وذلك بوضع X_1 بدلاً من X_0 فنحصل على X_2 وهكذا على الصيغة التكرارية $X_{n+1}=g(X_n)$.

ان النقطة التي تحقق هذه الصيغة تكون نقطة صامدة للدالة $g(X)$ والتي تمثل ايضاً جذراً للمعادلة $f(x)=0$.

مبرهنة: اذا كانت $g \in C[a,b]$ بحيث $g(X)\in[a,b]$ لكل قيم $X\in[a,b]$ فأن الدالة g لها نقطة صامدة على الفترة $[a,b]$. كذلك اذا كانت $g'(X)$ موجودة ضمن الفترة (a,b) بحيث أن

$$|g'(X)| \leq k < 1 \quad \text{لقيم } X \in (a,b)$$

فأن الدالة g لها نقطة صامدة وحيدة.

خوارزمية طريقة النقطة الصامدة

خطوة(1): ادخال الدالة $g(x)$ ، X_0 ، ϵ .

خطوة(2): ضع $i=1$.

خطوة(3): ضع $X=g(X_0)$

خطوة(4): اذا كان $|X-X_0|<\epsilon$ فأن X هو الجذر وتوقف.

خطوة(5): $i=i+1$

خطوة(6): ضع $X_0=X$ وارجع الى الخطوة(3).

شروط تقارب طريقة النقطة الصامدة

مبرهنة:- لتكن g دالة تحقق الشروط الاتية:

١- g دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$.

٢- $g(x) \in [a,b]$ لكل قيم $x \in [a,b]$.

٣- اذا كانت $g'(x)$ موجودة ضمن الفترة (a,b) بحيث ان:

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

فاذا كانت $x_0 \in [a,b]$ فان المتتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

المتولدة بالصيغة $x_n = g(x_{n-1})$

لقيم $n = 1, 2, \ldots$ تتقارب الى الحل المضبوط $\alpha \in [a,b]$

نتيجة: اذا كانت g تحقق شروط النظرية اعلاه فان الحد الاعلى للخطأ

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_0 - \alpha|$$

الشرط $|g'(x)| \leq k < 1$ يكفي لتقارب $\{x_n\}$ الى القيمة $\alpha = \lambda$.

H.W

اثبات

$$\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = \alpha$$

علماً ان x_n هي القيم التقريبية المتولدة من طريقة النقطة الصامدة.

مواصفات الطريقة (النقطة الصامدة).

١- سرعة اقتراب هذه الطريقة خطي (linear) ولكن هي افضل من طريقة التنصيف.

٢- مشتقة الدالة $g(x)$ يجب ان تحقق الشرط $|g'(x_0)| \leq k < 1$ عند نقطة البداية لكي نحصل على تكرارات مستقرة للوصول الى الجذر.

٣- كلما كانت قيمة k $(0 < k < 1)$ صغيرة وقريبة الى الصفر كلما كان الاقتراب اسرع الى الجذر.

ملاحظة: اذا كانت الجذر من دالة تحقق نأخذ اقل قيمة لـ K (قيمة مشتقة الدالة عند x_0) تكون صغيرة وسريعة الوصول الى الجذر الحقيقي.

تعريف

رتبة الجذر: لتكن $f(x)$ ومشتقاتها $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ معرفة ومستمرة قرب الجذر α فأن الدالة جذور برتبة M اذا وفقط اذا

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ \dots,\ f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

اذا كانت $m=1$ فالجذر بسيط (Simple Root).

اذا كانت $m=2$ فالجذر مكرر (Double Root).

اذا كانت $m>1$ فالجذر مكرر اكثر من مرة واحدة (Multiple Root).