الموضوع: التاريخ: / /

الفصل الثالث

اولاً : الدالة الاسية

ليكن z عدداً معقداً ، تعرف الدالة الاسية لـ z

بالصيغة

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

مثال : احسب قيم ما يأتي

1- $e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{0}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

2- $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$

$$e^{1-i\frac{\pi}{2}} = e^{1}\,e^{-i\frac{\pi}{2}} = e\left(\underbrace{\cos\frac{-\pi}{2}}_{=(0)} + i\underbrace{\sin\frac{-\pi}{2}}_{=(-1)}\right)$$

$$= e(-1i) = -ie$$

3- $e^{3+i\pi}$

$$e^{3+i\pi} = e^{3}\,e^{i\pi} = e^{3}\left(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0}\right)$$

$$= e^{3}(-1+0) = -e^{3}$$

التاريخ : / /

الموضوع :

خواص الدالة الاسية :

1- $|e^{z}| = e^{x}$

2- $\arg(e^{z}) = y + 2\pi n$ $\quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \mp \dots$

3- $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

4- $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

5- $(e^{z})^{n} = e^{nz}$

6- $\overline{(e^{z})} = e^{\bar{z}}$

7- $e^{z + 2\pi i} = e^{z}$

دالة e^{z} دورية ودورتها $2\pi i$

التاريخ : / /

الموضوع :

برهان بعض الخواص

1- $|e^{z}| = e^{x}$

$$|e^{z}| = |e^{x+iy}| = |e^{x}(\cos y + i\sin y)|$$

$$= |e^{x}|\,|\cos y + i\sin y|$$

$$= e^{x}\sqrt{\underbrace{(\cos^{2} yy + \sin^{2} y)}_{=1}} = e^{x}$$

2- $\arg(e^{z}) = y + 2\pi n$

$$\arg(e^{z}) = \arg e^{x+iy}$$

$$= \arg(e^{x}\, e^{iy})$$

حسب صيغة اويلر

$$\arg(e^{z}) = \arg[e^{x}(\cos y + i\sin y)]$$

$\because$ $\sin y$ و $\cos y$ دالة دورية مدتها 2π

$$\therefore \arg e^{z} = \arg e^{x}[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)]$$

$$y = y + 2\pi n$$

$$\therefore \arg e^{z} = y + 2\pi n$$

Scanned with CamScanner

التاريخ: / /

الموضوع: ....

6- $\overline{(e^{z})} = e^{\bar{z}}$

$\overline{(e^{z})} = \overline{e^{x}(\cos y + i \sin y)}$

$= e^{x}(\cos y - i \sin y)$

$= e^{x} e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$

7- $e^{z+2\pi i} = e^{z}$

$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)}$

$e^{z+2\pi i} = e^{x}\left[\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)\right]$

$\because$ sin و cos دوال دورية مدتها 2π

$\therefore e^{z+2\pi i} = e^{x}(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^{z}$

التاريخ: / /

الموضوع:

الدالة الاسية هي دالة تحليلية (كلية)

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$= e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y$$

$U = e^{x}\cos y$ و $V = e^{x}\sin y$

$U_x = e^{x}\cos y$ و $V_x = e^{x}\sin y$

$U_y = -e^{x}\sin y$ و $V_y = e^{x}\cos y$

وحسب شرطي معادلة كوشي - ريمان

1- $U_x = V_y$ و $e^{x}\cos y = e^{x}\cos y$

2- $U_y = -V_x$ و $-e^{x}\sin y = e^{x}\sin y$

∴ الدالة e^{z} تحقق معادلتي كوشي - ريمان

∴ الدالة e^{z} تحليلية على جميع نقاط المستوي D.

التاريخ: / /

الموضوع:

مشتق الدالة الأسية

بما أن الدالة الأسية تحليلية على جميع نقاط المستوى المعقد D فإن

$$\frac{\partial e^{z}}{\partial z} = \frac{\partial e^{x+iy}}{\partial (x+iy)} = \frac{\partial e^{x+iy}}{\partial x}$$

$$\text{or} = i\,\frac{\partial e^{x+iy}}{\partial y}$$

أي ان الاقتراب بأي اتجاه سيعطي نفس المشتق وللسهولة سوف نفترض الاقتراب باتجاه المحور x فتكون y ثابتة

$$\frac{\partial e^{z}}{\partial z} = \frac{\partial e^{x+iy}}{\partial (x+iy)}$$

$$= \frac{\partial e^{x}(\cos y + i\sin y)}{\partial x}$$

$$= (\cos y + i \sin y)\, e^{x}$$

$$= e^{x+iy} = e^{z}$$

واجب: اوجد المشتق عند الاقتراب من المحور y

التاريخ: / /

الموضوع:

برهن ان $e^{\bar{z}}$ دالة غير تحليلية لكل قيم z.

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$$e^{x-iy} = e^{x}(\cos y - i\sin y)$$

$u = e^{x}\cos y$, $v = -e^{x}\sin y$

$u_x = e^{x}\cos y$, $v_x = -e^{x}\sin y$

$u_y = -e^{x}\sin y$, $v_y = -e^{x}\cos y$

$\therefore u_x \neq v_y$, $u_y \neq v_x$

$\therefore$ الدالة ليست تحليلية لانها لا تحقق معادلتي كوشي - ريمان.

Scanned with CamScanner

التاريخ : / /

الموضوع :

ثانياً : الدالة اللوغارتمية

ان الدالة اللوغارتمية لعدد معقد z تعرف ب

$$w = \log z = \log r + i \arg(z) \qquad z \neq 0$$

حيث $\log r = \log|z|$ هو اللوغارتم الطبيعي الحقيقي

للقيمة المطلقة $r = |z|$ كما ان

$$\arg(z) = \theta + 2\pi k \qquad k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

نلاحظ ان الدالة اللوغارتمية متعددة ، عدد قيمها غير منتهي

ان القيمة الاساسية للوغارتم z تعرف

$$\log z = \log r + i(\theta) \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

ان الدالة اللوغارتمية معرفة على جميع نقاط المستوي المعقد عدا عند $z = 0$

$\log(0) =$ غير معرفة

مثال 1: احسب قيم اللوغاريتم الاتي ثم جد قيمته الاساسية

$\log(3i)$

$z = 3i$, $x = 0$, $y = 3$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + 3^2} = 3$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{0} = \infty$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\log(3i) = \log r + i(\theta + 2\pi k)$$

$$= \log(3) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

التاريخ :   /   /

الموضوع:

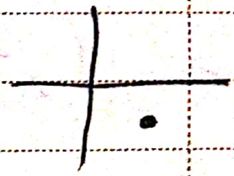
مثال 2 : اوجد قيم اللوغارتم

$\log(1-i)$

$Z = 1 - i \quad ، \quad x = 1 \quad ، \quad y = -1$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{1} = (-1)$



$\therefore \theta = \tan^{-1}(-1)$

$\therefore \theta = -\dfrac{\pi}{4}$

$\log(1-i) = \log \underset{}{\overset{\log(2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}} + i\left(\dfrac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)$

$= \dfrac{1}{2}\log(2) + i\left(\dfrac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)$

$k = 0 ، \mp 1 ، \mp 2 ، ---$

واجب : اوجد قيم اللوغارتم

$\log(\sqrt{3} - i)$

التاريخ : / /

الموضوع:

خواص الدالة اللوغاريتمية

1- $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$

2- $\dfrac{\log z_1}{\log z_2} = \log z_1 - \log z_2$

3- $\log z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log z$ or $\neq \frac{1}{n} \log z$

4- $\log e^{z} = z + 2\pi i$

5- $e^{\log z} = z$

برهان بعض الخواص

* $\log e^{z} = z + 2\pi i$

$\log e^{z} = \log e^{x+iy} = \log(e^{x} \cdot e^{iy})$

$= \log e^{x}(\cos y + i \sin y)$

$\because$ sin و cos دوال دورية مدتها 2π

$\therefore \log e^{z} = \log e^{x} + \log(\cos y + i \sin y)$

$= x + i(y + 2\pi) = (x + iy) + 2\pi i$

$= z + 2\pi i$

التاريخ: / /

الموضوع:

* $e^{\log z} = z$

$$e^{\log z} = e^{\log r + i(\theta + 2\pi k)}$$ من التعريف

$$= e^{\log r} \cdot e^{i(\theta + 2\pi k)}$$

$$= r \cdot e^{i(\theta)}$$

$$\because z = r e^{i\theta}$$

$$\therefore e^{\log z} = z$$

* $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

$$\log(z_1 z_2) = \log|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2)$$

$$= \log|z_1| + \log|z_2| + i \arg(z_1) + i \arg(z_2)$$

$$= [\log|z_1| + i \arg(z_1)] + [\log|z_2| + i \arg(z_2)]$$

$$= \log z_1 + \log z_2$$

التاريخ: / /

الموضوع:

مثال: اثبت ان $\log(i)^2 \neq 2\log i$

$$\log z = \log r + i\arg(z) \qquad z \neq 0$$

الطرف الايسر $\log(i)^2 = \log(-1)$

$$z = i^2 \quad , \quad z = -1 + i(0)$$

$$r = 1$$
$$\theta = \pi$$

$$\log(i)^2 = \log 1 + i(\pi + 2\pi k)$$

$$= i\pi(1 + 2k) \qquad k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

الطرف الايمن $2\log i = 2\left[\log 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right]$

$$= i(\pi + 4k\pi) = i\pi(1 + 4k) \quad , \quad k = 0, \mp 1, \mp 2$$

ملاحظة: $z = i \;,\; r = 1 \;,\; \theta = \frac{\pi}{2}$

∴ الطرف الايمن لا يساوي الطرف الايسر

ملاحظة:

* هذه الناحية تكون متساوية للقيم الموجبة لـ k وهي الصفر بينما تكون غير متساوية لبقية القيم لـ $k = \mp 1, \mp 2$
* وقد تكون غير متساوية لجميع القيم وبضمنها الاساسية
* وقد تكون متساوية لجميع القيم
* لذا لا تكون هذه القاعدة صحيحة دائماً للاعداد العقدية

Scanned with CamScanner

التاريخ: / /

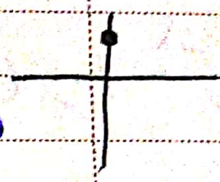
الموضوع:

مثال: اثبت ان $\log(1+i)^2 = 2\log(1+i)$ للقيم الاساسية لـ k

$$\log z = \log r + i(\theta + 2\pi k) \quad , \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

الطرف الايسر

$$\log(1+i)^2 = \log(1+2i-1) = \log(2i)$$



$$z = 2i \;,\; x = 0 \;,\; y = 2 \;,\; r = \sqrt{x^2+y^2} = 2$$

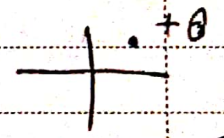
$$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{0} = \tan^{-1}\infty \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\log(2i) = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \log(1+i)^2$$

$$\therefore \log(1+i)^2 = \log 2 + i\frac{\pi}{2}(1+4k)$$

الطرف الايمن

$$2\log(1+i)$$



$$x = 1 \;,\; y = 1 \;,\; r = \sqrt{2} \;,\; \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$2\log(1+i) = 2\left[\log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$$

$$= \log 2 + 2i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

for $k = 0$

الطرف الايسر = الطرف الايمن

$$\log 2 + i\frac{\pi}{2} = \log 2 + i\frac{\pi}{2}$$

اي ان $\log(1+i)^2 = 2\log(1+i)$ للقيم الاساسية

بينما تكون غير متساوية لبقية القيم لـ k $(k = \mp 1, \mp 2, \dots)$

مثال: اثبت ان $\log(-1+i)^4 \neq 4\log(-1+i)$ للقيم الرئيسة

$$\log z = \log r + i(\theta + 2\pi k) \quad , \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

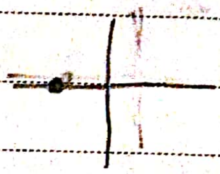
الطرف الايسر

$$\log(-1+i)^4 = \log\left[(-1+i)^2\right]^2 = \log\left[(-1+2i-1)\right]^2$$

$$= \log(2i)^2 = \log(-4)$$

$\log(-4)$

$x = -4 \,,\, y = 0 \,,\, r = 4 \,,$



$\theta = \pi$

$$\log(-4) = \log 4 + i(\pi + 2\pi k)$$

$$= 2\log 2 + i\pi(1 + 2k)$$

الطرف الايمن $\quad 4\log(-1+i)$

$\pi - \theta_0$	θ
$\pi + \theta$	$-\theta$

$z = -1 + i \,,\, r = \sqrt{2} \,,\, \theta = -\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore 4\log(-1+i) = 4\left[\log\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$$

$$= 2\log 2 + i\frac{3\pi}{4}\left(1 + \frac{8}{3}k\right)$$

نلاحظ ان الطرفين غير متساوين للقيم الرئيسة لـ k

$$2\log 2 + i\pi \neq 2\log 2 + i\frac{3\pi}{4}$$

التاريخ: / /

الموضوع:

اشتقاقات الدالة اللوغاريتمية

يمكن حساب مشتقتها بالاقتراب من z بأي اتجاه، سوف نأخذ اتجاه r في الاقتراب، فتكون θ ثابتة

من التعريف

$$\log z = \log r + i\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\log z = \frac{\partial}{\partial r\, e^{i\theta}}(\log r + i\theta)$$

$$= \frac{1}{e^{i\theta}}\frac{\partial}{\partial r}(\log r + i\theta)$$

$$= \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

واجب: مشتقة الدالة اللوغاريتمية بالاقتراب من الاتجاه θ

الموضوع: التاريخ: / /

مثال: جد قيم z التي تحقق المعادلة

$$e^{2z-1} = 1-i$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\log e^{2z-1} = \log(1-i)$$

$$2z-1 = \log(1-i)$$

$$2z = \log(1-i)+1 \qquad \div 2$$

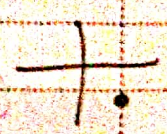
$$z = \frac{1}{2}\log(1-i) + \frac{1}{2} \quad \text{---} \quad (1)$$

نجد قيمة $\log(1-i)$

$\log(1-i)$

$z = 1-i \,,\; x = 1 \,,\; y = -1 \,,\; r = \sqrt{2} \,,\; \theta = \tan^{-1}\frac{-1}{1}$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{4}$$



$$\log(1-i) = \log r + i(\theta + 2\pi k)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) \quad \text{---} \quad (2)$$

نعوض (2) في (1)

التاريخ : / /

الموضوع :

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} i \left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k \right) + \frac{1}{2}$$

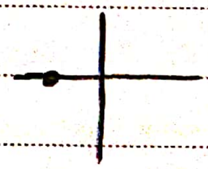
$$Z = \frac{1}{4} \log 2 + i \left(\frac{-\pi}{8} + \pi k \right) + \frac{1}{2}$$

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log 2 + i \frac{\pi}{8} (-1 + 8k)$$

مثال : برهان

$$\log(-1) = (2k+1)\pi i$$

$$\log(z) = \log r + i(\theta + 2\pi k)$$



$$z = -1 \;,\; x = -1 \;,\; y = 0 \;,\; r = 1 \;,$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{0}{1} \;,\; \theta = \pi$$

$$\log(-1) = \log(1) + i(\pi + 2\pi k)$$

$$= 0 + i\pi(1 + 2k)$$

$$= i\pi(1 + 2k)$$

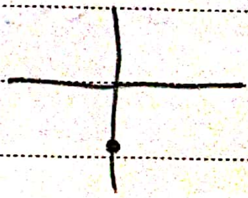
التاريخ: / /

الموضوع:

مثال: اثبت ان $\log(-i) = \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi i$

$$\log(z) = \log r + i(\theta + 2\pi k)$$

$z = -i$, $x = 0$, $y = -1$



$r = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\log(-i) = \log(1) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$= 0 + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$= i\pi\left(\frac{3}{2} + 2k\right)$$

الموضوع:

ثالثاً: الدوال المثلثية،

من صيغة اويلر

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

من هاتين الصيغتين يمكن ان نحصل على

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

وبنفس الطريقة يمكن تعريف جيب وجيب تمام المتغير المعقد z

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad و \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ان $\cos z$ و $\sin z$ هي دوال كلية لانها تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد.

يمكن ايجاد $\tan z$ و $\cot z$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \ (\cos z \neq 0) \quad و \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \ (\sin z \neq 0)$$

$$\text{and} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \ (\cos \neq 0) \quad و \quad \csc z = \frac{1}{\sin z} \ (\sin z \neq 0)$$

* ان $\tan z, \sec z$ تحليلتان في كل نقاط المستوي عدا النقاط التي تجعل $\cos z = 0$

* وان $\cot z, \csc z$ تحليليتان في كل نقاط المستوي عدا النقاط التي تجعل $\sin z = 0$

Scanned with CamScanner

الموضوع:

اشتقاقات الدوال المثلثية

* $\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$ و $\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$

* $\frac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z$ و $\frac{d}{dz}(\cot z) = -\csc^2 z$

* $\frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z$ و $\frac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z$

خواص الدوال المثلثية

1- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

2- $\cos(-z) = \cos z$ دالة زوجية

3- $\sin(-z) = -\sin z$ دالة فردية

4- $\overline{\cos(z)} = \cos \bar{z}$ و $\overline{\sin(z)} = \sin \bar{z}$

5- $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ و $\sin(z + 2\pi) = \sin z$

6- $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$

7- $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

8- $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$

9- $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$

برهان بعض الخواص المثلثية

* $\cos(-z) = \cos z$

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{-(-iz)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z)$$

* $\sin(-z) = -\sin z$

$$\sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{-(-iz)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}$$

$$= -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = -\sin(z)$$

* $\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z})$

$$\overline{\cos(z)} = \overline{\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)} = \frac{e^{\overline{iz}} + e^{\overline{-iz}}}{2}$$

$$= \cos(\bar{z})$$

واجب : برهن الخواص الاتية

1- $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$

2- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Scanned with CamScanner

الموضوع: .... التاريخ: / /

رابعاً: الدوال الزائدية

تعرف الدوال الزائدية للعدد المعقد z

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

خواص الدوال الزائدية

1- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

2- $\cosh(-z) = \cosh z$ و $\sinh(-z) = -\sinh z$

3- $\overline{\cosh z} = \cosh \bar{z}$ و $\overline{\sinh z} = \sinh \bar{z}$

4- $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$

$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh(z)$

التاريخ: / /

الموضوع:

مثال: اذا كان $z=(k+\frac{1}{2})\pi i$ برهن ان

$\cosh z = 0$

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi i} + e^{-(k+\frac{1}{2})\pi i}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\cos(k+\tfrac{1}{2})\pi + \cancel{i\sin(k+\tfrac{1}{2})\pi} + \cos(k+\tfrac{1}{2})\pi - \cancel{i\sin(k+\tfrac{1}{2})\pi}\Big]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\Big[\cancel{2}\cos(k+\tfrac{1}{2})\Big]$$

$$= \cos(k+\tfrac{1}{2})\pi = \cos(k\pi+\tfrac{1}{2}\pi)$$

من العلاقة

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= \cos k\pi \overset{=0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \overset{=0}{\sin k\pi}\sin\frac{\pi}{2}$$

$\therefore \cosh z = 0$

الموضوع: التاريخ: / /

مشتقة الدوال المثلثية والزائدية

بما ان الدوال المثلثية والزائدية هي تركيب خطي من الدالة الاسية فيمكن ايجاد مشتقاتها من مشتقة e^z

مثال: اوجد مشتقة الدالة $\cos z$

$$\frac{\partial}{\partial z}\cos z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}e^{iz} + \frac{\partial}{\partial z}e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(i e^{iz} - i e^{-iz}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\times\frac{i}{i}$$

$$= \frac{-1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = -\sin z$$

واجب: اوجد مشتقة

$\sin z$ ، $\cosh z$ ، $\sinh z$

الموضوع:

العلاقة بين الدوال المثلثية والزائدية

* $\cos(iz) = \cosh z$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z$$

* $\sin(iz) = i \sinh z$

* $\cosh(iz) = \cos z$

* $\sinh(iz) = i \sin z$

بعض العلاقات الأخرى

* $\cos z = \cos(x + iy)$

$$= \cos x \cosh y - i \sinh y \sin x$$

* $\sin z = \sin(x + iy)$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

التاريخ: / /

موضوع:

$$* \cosh z = \cosh(x+iy)$$

$$= \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$* \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cos z = \cos(x+iy)$$

حيث $z = x+iy$

$$= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{ix} e^{-y} + e^{-ix} e^{y}}{2}$$

$$= e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \right) - i \sin x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \right)$$

$$\cos x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

واجب: اوجد العلاقة

$\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$