" المعادلات التفاضلية "

المعادلة التفاضلية هي علاقة تساوي بين متغير مستقل (X) ومتغير تابع وليكن (Y) وواحد او اكثر من المشتقات التفاضلية (y' ، y'') اي انها على الصيغة العامة

$$(x, y, y', y'', \ldots\ldots) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى المعادلة التفاضلية العادية

اما اذا كانت المتغيرات المستقلة اكثر من واحد مثل (x,y) وكان $Z(x,y)$ قابل للاشتقاق بالنسبة ل (x,y) فان المعادلة في هذه الحالة تسمى معادلة تفاضلية

وتكون على شكل

$$\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ldots\ldots\right) = 0$$

ومن أمثلة على المعادلات التفاضلية

$$y' + xy = x^2 \ldots$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

رتبة المعادلة التفاضلية : Order

هي رتبة اعلى معامل تفاضلي (اعلى مشتقة موجودة) في المعادلة التفاضلية

$$f(x,y), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

مشتقة من الدرجة الاولى $y' = f(x,y)$

" " الثانية $y'' = f(x,y,y')$

* درجة المعادلة التفاضلية Degree

هي القوة المرفوعة اليها أعلى مشتقة تفاضلية في المعادلة بعد وضع المعادلة بالصورة الصحيحة والقياسية بالنسبة للمشتقات

(اما المتغيرات ضمن المعادلة لا تظهر في قوة كسرية)

مثال/ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

رتبة ثانية ودرجة الثانية

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} + x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$$

رتبة ثالثة ودرجة ثانية

مثال/

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

بتربيع الطرفين

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

رتبة ثانية ودرجة ثانية .

* المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الا

وهذه تكون على شكل $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

أو $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

ولحل هذه المعادلة هناك عدة طرق :-

1) separation variable فصل المتغيرات

هذه الطريقة تستند اذا امكن وضع المعادلة على الص

$$fx\,dx+g(y)\,dy=0$$

حيث $f(x)$ هي دالة فقط في X وكذلك $g(y)$ هي دالة فقط في (y).

بعد اجراء التكامل على المعادلة نحصل على حل هذه المعادلة

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = \int 0 = c$$

حيث c ثابت اختياري
ويسمى هنا بالحل العام.

مثال/ $e^{x}\cos y\,dx + (1+e^{x})\sin y\,dy = 0$

نقسم على $\dfrac{1}{\cos y(1+e^{x})}$

$$\frac{e^{x}\cancel{\cos y}}{\cancel{\cos y}(1+e^{x})}\,dx + \frac{\cancel{(1+e^{x})}}{\cos y\,\cancel{(1+e^{x})}}\sin y\,dy = 0$$

$$\frac{e^{x}}{(1+e^{x})}\,dx + \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = 0$$

$$\int \frac{e^{x}}{(1+e^{x})}\,dx - \int \frac{-\sin y}{\cos y}\,dy = \int 0$$

$$\ln(1+e^{x}) - \ln(\cos y) = \ln c$$

$$\ln(1+e^{x}) = \ln\cos y + \ln c$$

$$\ln(1+e^{x}) = \ln c\cos y$$

Note
(كل e يلغي Ln)

نأخذ e للطرفين

$$1 + e^{x} = c \cos y$$

اذا كانت عندنا نقطة $\overset{x,\,y}{(0,0)}$

$$1 + e^{0} = c \cos 0 \quad , \; c = 2$$

مثال/

$$4xy^2\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$$

نقسم على $y^2(x^2+1)$

$$\frac{4x\cancel{y^2}\,dx}{\cancel{y^2}(x^2+1)} + \frac{\cancel{(x^2+1)}}{y^2\cancel{(x^2+1)}}\,dy = 0$$

$$\frac{4x\,dx}{(x^2+1)} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)}\,dx + \int \frac{dy}{y^2} = \int 0$$

$$\frac{4}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)}\,dx + \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 0$$

$$y^{-2+1} = y^{-1} = -\frac{1}{y}$$

$$2\ln(x^2+1) - \frac{1}{y} = c$$

"المعادلات التفاضلية المتجانسة"

تكون المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

متجانسة إذا كان كل من M, N دالة متجانسة من نفس الدرجة علماً أن $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n إذا كان

$$\boxed{f(tx,ty) = t^n f(x,y)}$$

القانون

t: هي الوسيط.

n: هي درجة التجانس.

حيث إن $t \in R$

ومثال ذلك / $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + 3(tx)(ty) - (ty)^2$$

$$= \underbrace{t^2(x^2 + 3xy - y^2)}_{t^n f(x,y)}$$

تبسيط

لبيان الشرح

$$t^2x^2 + 3t^2xy - t^2y^2$$

مثال/ $(y^2+x^2)\,dx + xy\,dy = 0$

$M(x,y) = y^2 + x^2$

$M(tx,ty) = (ty)^2 + (tx)^2$
$= t^2\underbrace{(x^2+y^2)}$

$t^n M(x,y)$ من الدرجة الثانية

$\cancel{M(tx,ty)}$ $N(x,y) = xy$

$N(tx,ty) = (tx)(ty) = t^2\underbrace{(xy)}$

$t^n N(x,y)$ الدرجة متجانسة من الدرجة الثانية

في الحالة المتجانسة نحل كما يلي :-

① نفرض أن $v = \frac{y}{x} \Leftarrow y = vx$

② نوجد $dy = v\,dx + x\,dv$

ثم نعوض في المعادلة الاصلية ونوجد الحل

س/ اثبت ان المعادلة التفاضلية الاتية متجانسة ثم اوجد حلها:

$$2x^2dy - y(2x+y)dx = 0$$

sol:

$$M(tx,ty) = 2x^2 = 2(tx)^2 = t^2\,2x^2 = t^n M(x,y)$$

$$N(x,y) = -y(2x+y)$$

$$N(tx,ty) = -ty(2tx+ty) = \underbrace{-t^2 y(2x+y)}_{t^n N(x,y)}$$

∴ المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية.

$$y = vx \quad , \quad v = \frac{y}{x} \qquad dy = v\,dx + x\,dv$$

$$2x^2(v\,dx + x\,dv) - vx(2x+vx)\,dx = 0$$

$$= \cancel{2x^2 v\,dx} + 2x^3 dv - \cancel{2x^2 v\,dx} - v^2x^2 dx = 0$$

$$= (-v^2x^2dx + 2x^3dv) = 0$$

بالقسمة على $\frac{1}{v^2x^3}$

$$= \frac{-v^2\cancel{x^2}}{v^2x^{\cancel{3}}}dx + \frac{2\cancel{x^3}dv}{v^2\cancel{x^3}} = 0$$

$$= \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{2\,dv}{v^2} = c$$

$$-\ln x + 2\int v^{-2}\,dv = c$$

$$-\ln x + 2\frac{v^{-2+1}}{-1} = c \Rightarrow -\ln x - 2\frac{1}{v} = \ln c$$

$$-2\frac{x}{y} = \ln xc$$

$$e^{-2\frac{x}{y}} = e^{\cancel{\ln} xc}$$ ملاحظة الـ ln يمحي e

$$e^{-2\frac{x}{y}} = xc$$ الحل العام

مثال/ أثبت ان المعادلة التالية متجانسة ثم أوجد حلها؟

$$x(1+e^{y/x})\,dy + (x-y)e^{y/x}\,dx$$

Sol:

$$M(x,y) = x(1+e^{y/x})$$

$$M(tx,ty) = tx(1+e^{ty/tx}) = t\underbrace{x(1+e^{y/x})}_{M(x,y)}$$

$$N(x,y) = (x-y)e^{y/x}$$

$$N(tx,ty) = (tx-ty)e^{\cancel{t}y/\cancel{t}x} = t(x-y)e^{y/x}$$

∴ المعادلة متجانسة من الدرجة الاولى.

$$y = vx \quad , \quad v = \frac{y}{x} \quad , \quad dy = v\,dx + x\,dv$$

$$x(1+e^{\frac{vx}{x}})(v\,dx+x\,dv)+(x-vx)e^{\frac{vx}{x}}$$

$$\therefore\; x(1-v)e^{v}dx+x\left[(v\,dx+x\,dv)+ve^{v}dx+\right.$$

$$xe^{v}-xve^{v}+xv\,dx+x^{2}dv+vxe^{v}+x^{2}e^{v}dv$$

$$x(e^{v}+v)\,dx+x^{2}(1+e^{v})\,dv=0$$

$1/x^{2}(v+e^{v})$ بالقسمة على

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{1+e^{v}}{e^{v}+v}\,dv=\int 0$$

$$\ln|x|+\ln|e^{v}+v|=\ln c$$

$$\ln|x|+\ln\left|e^{y/x}+\frac{y}{x}\right|=\ln c$$

الحل العام

" المعادلات التفاضلية التامة "

* المعادلة التفاضلية بالصورة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ تكون تامة إذا كانت المشتقة الجزئية لـ N و M بالنسبة لـ x, y متساوية.

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

* لحل مثل هذه المعادلة نكامل $M(x,y)dx$ ونكامل $N(x,y)dy$ ثم نوجد الكل.
ثم نأخذ الحدود المشتركة وغير المشتركة ويكون هذا هو حل المعادلة.

مثال/ اثبت ان المعادلة التفاضلية تامة ثم أوجد حلها

$$(2xe^y + e^x)dx + (x^2+1)e^y dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xe^y + e^x \quad , \quad N(x,y) = (x^2+1)e^y$$

$$\frac{dM}{dy} = 2xe^y + 0$$

$$\frac{dN}{dy} = x^2e^y + e^y$$

$$\frac{dN}{dx} = x^2 + 0 + e^y \, 2x + 0$$

$$= 2xe^y$$

$$\therefore \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية تامة.

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (2xe^{y} + e^{x})\,dx$$

$$= e^{y}\int 2x\,dx + \int e^{x}\,dx$$

$$= \frac{2x^{2}}{2}e^{y} + e^{x} = x^{2}e^{y} + e^{x}$$

$$g(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \int (x^{2}+1)e^{y}\,dy$$

$$= \int x^{2}e^{y}\,dy + \int e^{y}\,dy$$

$$g(x,y) = x^{2}e^{y} + e^{y}$$

$$f(x,y) + g(x,y) = c$$

$$x^{2}e^{y} + e^{x} + e^{y} = c$$

ملاحظة/ تكامل الدالة M نعوضها f

تكامل الدالة N نعوضها g

$(3e^{3x}y - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$ / مثال

Sol:

$M(x,y) = 3e^{3x}y - 2x$ $\quad\quad N = e^{3x}$

$\frac{dM}{dy} = 3e^{3x} - 0$ $\quad\quad \frac{dN}{dx} = 3xe^{3x}$

$\because \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ $\therefore$ المعادلة تامة

$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx$

$= \int (3e^{x}y - 2x)\,dx = y\int 3e^{3x}\,dx - 2\int x\,dx$

$= ye^{3x} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = ye^{3x} - x^2$

$g(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \int e^{3x}\,dy$

$= e^{3x}\int dy = ye^{3x}$

$ye^{3x} - x^2 = c$

مثال / $(\cos x + x\cos y - y)\,dy = y\sin x - \sin y\,dx$

Sol:-

يجب ان نساوي المعادلة بالصفر

$$\underbrace{(\cos x + x\cos y - y)\,dy}_{N\,dy} - \underbrace{y\sin x\,dx + \sin y\,dx}_{M\,dx} = 0$$

$$M(x,y) = -y\sin x + \sin y = \sin y - y\sin x$$

$$\frac{dM}{dy} = \cos y - \sin x$$

$$N(x,y) = \cos x - x\cos y - y$$

$$\frac{dN}{dx} = -\sin x + \cos y - 0$$

$\therefore \dfrac{dN}{dx} = \dfrac{dM}{dy}$ $\therefore$ الدالة تامة

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx$ note/ نكامل المعادلة الاصلية

$$= \int (\sin y - y\sin x)\,dx$$

$= \sin y \int dx - y \int \sin x\,dx \leftarrow$ جزأنا التكامل

$$= x\sin y + y\cos x$$

$$g(x,y) = \int N(x,y)\,dy$$

$$= \int (\cos x + x\cos y - y)\,dy$$

$= \cos x \int dy + x \int \cos y \, dy - \int y \, dy$

$= y \cos x + x \sin y - \frac{y^2}{2}$

$F(x,y) + g(x,y) = c$

$x \sin y + y \cos x - \frac{y^2}{2} = c$ الحل العام

" المعادلة التفاضلية الخطية "

هذا النوع من المعادلات يكتب بالصيغة الآتية :-

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = Q(x) \quad \text{---} \; ①$$

لايجاد حل لحل هذه المعادلة نتبع مايلي :-

1. نجد الحل الابسط للمعادلة والتي صيغتها $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$

نقسم على $\frac{dx}{\cancel{dx}\,y}$

ملاحظة/ الاشتقاق غير مطلوب.

$$\frac{dy}{\cancel{dx}} \cdot \frac{\cancel{dx}}{y} + p(x)\,\cancel{y}\,\frac{dx}{\cancel{y}} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = 0$$

$$\ln y + \int p(x)\,dx = \ln c$$

$$\int p(x)\,dx = \ln c - \ln y$$

$$\int p(x)\,dx = \ln \frac{c}{y}$$

$$e^{\int P(x) y\, dx} = e^{\ln \frac{c}{y}}$$

$$\therefore\ c = y e^{\int P(x)dx}$$ ← تفاضل المعادلة

$$d(c) = d\left(y e^{\int P(x)dx}\right)$$

$$0 = e^{\int P(x)dx}\, dy + y \times e^{\int P(x)dx} \times P(x)dx$$

$$0 = e^{\int P(x)dx}\left(dy + y P(x)\, dx\right)$$

$e^{\int P(x)dx}$ يسمى عامل التكامل

حل هذه المعادلة :-

اولاً/ نستخرج عامل التكامل $e^{\int P(x)dx}$ ثم نضرب عامل التكامل في المعادلة ① ثم نحول المعادلة الى معادلة تامة:

$$y e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}\, Q(x)\, dx$$

ملاحظة/ $P(x)$ $Q(x)$ دالتان لـ x فقط

حفظ

المعادلة التفاضلية الخطية نتبع :-

أولاً / نجعل المعادلة التفاضلية الخطية بالشكل

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$

ثانياً / نوجد عامل التكامل $e^{\int p(x)\,dx}$.

ثالثاً / نضرب عامل التكامل في المعادلة التفاضلية فتتحول الى معادلة تامة .

رابعاً / نكامل الطرفين لايجاد الحل .

* ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ *

مثال / حل المعادلة التفاضلية الآتية :-

$$x^2 dy - \sin 3x\, dx + 2xy\, dx = 0$$

نضرب المعادلة * $\frac{1}{x^2\, dx}$

$$\frac{\cancel{x^2}\, dy}{\cancel{x^2}\, dx} - \frac{\sin 3x\, \cancel{dx}}{x^2\, \cancel{dx}} + \frac{2\cancel{x}y\, \cancel{dx}}{x^{\cancel{2}}\, \cancel{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\sin 3x}{x^2} + \frac{2y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

$$P(x) = \frac{2}{x} \quad , \quad Q(x) = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

$$I.F = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln x}$$

$$= e^{\ln x^2} = x^2$$

عامل التكامل $\Rightarrow I.F \cdot y = \int I.F \; Q(x)\, dx + c$

$$x^2 y = \int \cancel{x^2} \cdot \frac{\sin 3x}{\cancel{x^2}} dx + C$$

$$x^2 y = \int \sin 3x \, dx + C$$

$$x^2 y = \frac{1}{3} \int 3\sin 3x \, dx + C$$

$$x^2 y = \frac{-1}{3} (\cos 3x) + c$$

$$\boxed{\therefore \; y = \frac{c}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2}}$$

العام